Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2016-08-24
Tid:	14.00 – 19.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Som bekant gäller sambandet $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ för alla $v \in \mathbb{R}$. Låt punkten $(\cos v, \sin v)$ vara en godtycklig punkt på enhetscirkeln och illustrera sambandet i denna enhetscirkel.

   b) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen
$$2\sin^2 x + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0\,.$$

2. Betrakta funktionen $f(x) = \ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1)$.
   a) Bestäm f:s definitionsmängd, D_f.
   b) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $f(x) = \ln 6$.

3. Låt $f(x) = |x - 1| + 2x, -1 \leq x \leq 2$.
   a) Lös ekvationen $2f(x) = 3$.
   b) Rita grafen till $y = f(x)$ för $x \in [-1,2]$.
   c) Har f invers? Bestäm i så fall denna inklusive dess definitionsmängd.

4. Betrakta planet $x - y + 2z = 0$ och linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. (ON-bas).
   a) Bestäm skärningspunkten mellan planet och linjen.
   b) Låt punkten Q vara den ortogonala projektionen av punkten $P = (1, -1,1)$ på det givna planet. Bestäm punkten Q:s koordinater.

5. Givet det komplexa talet $z = \sqrt{3} + i$,
   a) bestäm $|z|$ och $\arg z$.
   b) beräkna z^{15} och skriv på formen $a + bi$ på så enkel form som möjligt.
   c) bestäm alla komplexa tal u som uppfyller ekvationen $|u - z| = 2|u - i|$, och markera dessa u i det komplexa talplanet.

6. I en ON-bas ges två plan av ekvationerna
$$x + y + z = 3$$
   respektive
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\ t \in \mathbb{R}.$$
   a) Visa att planen är parallella.
   b) Beräkna avståndet mellan planen.

7. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q},$$
   där a och q är reella konstanter med $q \neq 1$, gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.