

TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2017-08-23
Lösningsskiss

1. a) För linjer som är rätvinkliga gäller att produkten av deras riktningskoefficienter $= -1$. De aktuella linjerna har riktningskoefficienterna $-\frac{4}{a}$ respektive 3. Alltså skall det gälla att

$$-\frac{4}{a} \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow a = 12$$

Svar: $a = 12$

b) En cirkel i xy -planet som har medelpunkt i (a, b) och radien r beskrivs av ekvationen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

För att finna medelpunkten och radien för den aktuella cirkeln gör vi omskrivning via kvadratkompletteringar:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Alltså har cirkeln medelpunkt i $(-1, 2)$ och radien $\sqrt{9} = 3$.

Svar: Medelpunkt i $(-1, 2)$ och radien 3.

2. a)

$$\frac{x}{1-x} \leq \frac{2}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - \frac{2}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3) - 2(1-x)}{(1-x)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 2 + 2x}{(1-x)(x-3)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(1-x)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(1-x)(x-3)} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att den sista olikheten är uppfylld för $x \in]-\infty, -1] \cup]1, 2] \cup]3, \infty[$.

Eftersom vi har ekvivalenser överallt ovan så gäller även den ursprungliga olikheten för samma värden på x .

Svar: $x \in]-\infty, -1] \cup]1, 2] \cup]3, \infty[$.

b) Med $x = -1$ får vi villkoret $(-1)^3 + a - 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

Med detta värde på a kan ekvationen skrivas $x^3 - 4x^2 + x - 6 = 0$. Här är, enligt faktorsatsen,

$(x + 1)$ faktor i ekvationens VL. Ekvationen kan då skrivas $(x + 1)k(x) = 0$, där $k(x)$ fås via

polynomdivision, så att $k(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x - 6}{x + 1}$. Utförd division ger oss $k(x) = x^2 - 5x + 6$, och då får vi

ekvationens övriga rötter som lösningar till ekvationen $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Ekvationen har alltså lösningarna

$$x = -1, x = 2 \text{ och } x = 3.$$

Svar: $x = -1, x = 2$ och $x = 3$

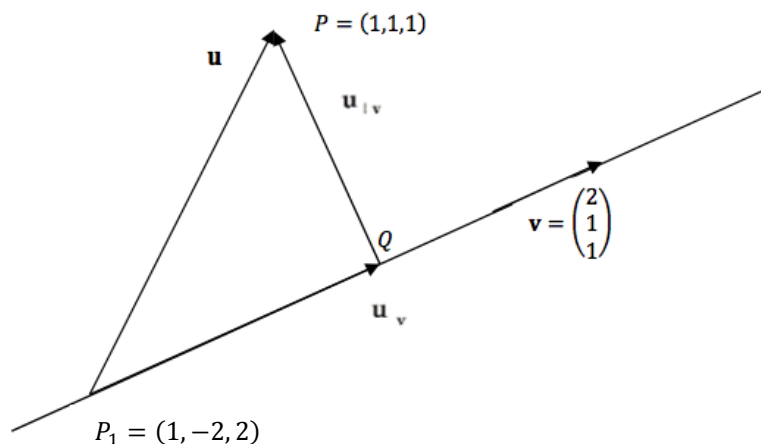
3. a) Om vi sätter in linjens ekvation i planets ekvation får vi villkor på parametern t vid en eventuell skärning mellan linjen och planet. Vi får villkoret

$$(1 + 2t) - 2(-2 + t) + (2 + t) = 0 \Leftrightarrow t = -7,$$

som insatt i linjens ekvation ger oss skärningspunkten $(1 - 14, -2 - 7, 2 - 7) = (-13, -9, -5)$.

Svar: Skärningspunkten är $(-13, -9, -5)$.

- b) Vi ritar figur och bildar vektorn $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Det sökta avståndet ges av

$$|\mathbf{u}_{\perp v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel v}| \stackrel{\text{proj.formeln}}{=} \left| \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ l.e.}$$

Svar: Avståndet mellan punkten och linjen är $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ l.e.

- c) Avståndet mellan punkten (1,1,1) och planet är 0, ty punkten ligger i planet.

Svar: 0 l.e.

4. a) Vi har

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{2}}, x \leq 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1-x}{2}, x \leq 1, y \geq 0 \Leftrightarrow x = 1 - 2y^2, y \geq 0$$

Alltså har vi $f^{-1}(x) = 1 - 2x^2, x \geq 0$

Svar: $f^{-1}(x) = 1 - 2x^2, x \geq 0$

- b) Om graferna har en gemensam punkt så måste den, på grund av egenskaper hos funktion och invers, ligga på linjen $y = x$ där $x \in D_f \cap D_{f^{-1}} =]-\infty, 1] \cap [0, \infty[= [0, 1]$.

Vi finner den eventuella skärningspunktens x -koordinat genom att lösa ekvationen $f^{-1}(x) = x$ eller $f(x) = x$. Vi väljer att lösa den förstnämnda.

$$f^{-1}(x) = x, x \in [0, 1] \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = x, x \in [0, 1] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Observera att ekvationens andra rot $x = -1 \notin [0, 1]$.

Eftersom $y = x$ vid skärning så skär kurvorna varandra i punkten $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Svar: Skärning i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. a)

$$z = \frac{1-i}{2i} = \frac{(1-i) \cdot (-2i)}{2i \cdot (-2i)} = \frac{-2i - 2}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Alltså är

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Svar: $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arg(z^3) = 3 \arg z$, där vi har (rita figur) $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$, som ger oss $\arg(z^3) = 3 \cdot \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{9\pi}{4}$.

Vi kan dock välja att $-\pi < \arg(z^3) \leq \pi$ så att $\arg(z^3) = -\frac{\pi}{4}$

Svar: $\arg(z^3) = -\frac{\pi}{4}$

c) Med $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ får vi

$$w = z + 1 + i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + 1 + i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Vi har då $|w| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ och $\arg w = \frac{\pi}{4}$ (rita figur)

Alltså har vi $z + 1 + i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$, och vi får

$$(z + 1 + i)^{16} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right)^{16} = \frac{1}{2^8} e^{16 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{256} \cdot e^{4\pi} = \frac{1}{256} \cdot 1 = \frac{1}{256}$$

Svar: $\frac{1}{256}$

6. a) f är definierad om $1 - 2x > 0$ och $x + 1 > 0$. Det första villkoret innebär att $x < \frac{1}{2}$ och det andra att $x > -1$. Den sökta snittmängden är alltså $] -1, \frac{1}{2} [$.

Svar: $D_f =] -1, \frac{1}{2} [$

b) Vi skall lösa ekvationen $f(x) = 0, x \in D_f =] -1, \frac{1}{2} [$, och har alltså att

$$\ln(1 - 2x) + \ln \sqrt{x + 1} = 0, x \in D_f \Leftrightarrow \ln((1 - 2x) \cdot \sqrt{x + 1}) = \ln 1, x \in D_f \Leftrightarrow$$

$$(1 - 2x) \cdot \sqrt{x + 1} = 1, x \in D_f \Leftrightarrow (1 - 2x)^2(x + 1) = 1, x \in D_f \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = 0, x \in D_f \Leftrightarrow$$

Ty observera att
 $\forall x \geq 0$ för $x \in D_f$

$$x(4x^2 - 3) = 0, x \in D_f \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Anm: Ekvationens rot $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ligger utanför D_f .

Svar: Ekvationen har lösningarna $x = 0$ och $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Med hjälp av induktion har vi

$$\sum_{k=1}^n (2k^2 + k) = \frac{n(4n + 5)(n + 1)}{6}$$

Steg I:

$$VL(1) = \sum_{k=1}^1 (2k^2 + k) = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3 = \frac{1(4 \cdot 1 + 5)(1 + 1)}{6} = \frac{18}{6} = 3 = HL(1)$$

Så sambandet gäller för $n = 1$.

Steg II: Vi antar att sambandet gäller för godtyckligt fixt $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. att

$$VL(p) = \sum_{k=1}^p (2k^2 + k) = \frac{p(4p + 5)(p + 1)}{6} = HL(p)$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} \text{VL}(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} (2k^2 + k) = \left(\sum_{k=1}^p (2k^2 + k) \right) + (2(p+1)^2 + (p+1)) = [\text{enligt antagandet}] = \\ &= \frac{p(4p+5)(p+1)}{6} + 2p^2 + 5p + 3 = \frac{p(4p+5)(p+1) + 6(2p^2 + 5p + 3)}{6} = \frac{4p^3 + 21p^2 + 35p + 18}{6}, \end{aligned}$$

medan

$$\text{HL}(p+1) = \frac{(p+1)(4(p+1)+5)((p+1)+1)}{6} = \frac{(p+1)(4p+9)(p+2)}{6} = \frac{4p^3 + 21p^2 + 35p + 18}{6}.$$

Därmed har vi visat att om $\text{VL}(p) = \text{HL}(p)$ så gäller det att $\text{VL}(p+1) = \text{HL}(p+1)$.

Steg III

Påståendet gäller enligt Steg I för $n = 1$. Enligt Steg II gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Alltså gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.