TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2017-01-03 - Lösningsförslag

1. a) $x^3 - 3x^2 \leq 13x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 13x + 15 \leq 0 \Leftrightarrow$ [bestäm nollställen och faktorisera] $\Leftrightarrow$ $(x-1)(x-5)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow$ [teckenstudium] $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [1,5]$

Svar: $x \in]-\infty, -3] \cup [1,5]$

b) Uttrycket är definierat $\Leftrightarrow \frac{\arctan(x-1)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$ [gör teckenstudium] $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [1, \infty[$

Svar: $x \in]-\infty, -2[\cup [1, \infty[$

2a)

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + n2\pi \text{ eller } 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + n2\pi$$

Här saknar det andra villkoret lösningar i x så ekvationen är ekvivalent med villkoret

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + n2\pi \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + n\frac{\pi}{2}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{24} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

2b) Ekvationens termer är definierade $\Leftrightarrow x^2 - 9 > 0$ och $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in]-5, -3[\cup]3, \infty[= D_{\text{ekv}}$
Alltså skall vi lösa ekvationen under förutsättningen att $x \in D_{\text{ekv}}$. Vi får

$$\ln(x^2 - 9) - \ln(x+5) = \ln 7\,, x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) = \ln(x+5) + \ln 7, x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 - 9) = \ln 7(x+5), x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) = \ln(7x + 35), x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow [\text{ty ln} - \text{funktionen är omändbar}]$$

$$x^2 - 9 = 7x + 35, x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow [\text{lös andragradsekvationen}] \Leftrightarrow x = -4 \text{ eller } x = 11, x \in D_{\text{ekv}} \Leftrightarrow$$

$$x = -4 \text{ eller } x = 11$$

Svar: $x = -4$ eller $x = 11$.

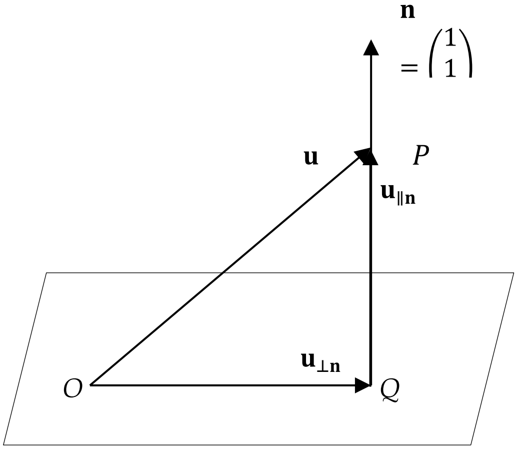
3. a) Vi sätter in linjens ekvation i planets och får villkoret

$$(2+t) + (1-2t) + (1-2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3},$$

som insatt i linjens ekvation ger skärningspunkten $\left(2 + \frac{4}{3}, 1 - 2\cdot\frac{4}{3}, 1 - 2\cdot\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.
Kontroll visar att denna punkt ligger i planet.

Svar: Skärningspunkten $=\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

b) Vi konstaterar att origo, *O*, ligger i det givna planet, och ritar en figur (skiss) där vi har planets normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.



Vi söker Q:s koordinater och söker därför ortsvektorn $\overrightarrow{OQ}$.

Om vi låter $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ får vi

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{u}_{\perp\mathbf{n}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = [\text{projektionsformeln}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Alltså har vi

$$Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Svar: Den ortogonala projektionen av punkten P på planet är $Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

4. a) $z = -1 + i\sqrt{3} = [\text{Rita figur och bestäm } |z| \text{ och } \arg z] = 2e^{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

Svar: $|z| = 2$ och $\arg z = \frac{2\pi}{3}$

b)

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{17} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{17} = 2^{17} \cdot \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{17} = 2^{17}e^{i\frac{34\pi}{3}} = 2^{17}e^{i\left(10\pi + \frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$= 2^{17}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2^{17}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{17}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{16} - i \cdot 2^{16}\sqrt{3}$$

Svar: $-2^{16} - i \cdot 2^{16}\sqrt{3}$

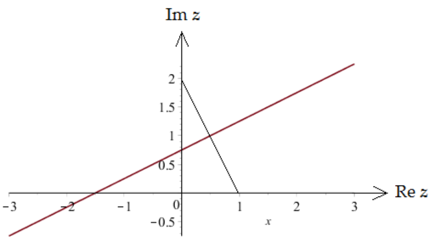
c) Låt $z = x + iy$. Vi får

$$|z - 1| = |z - 2i| \Leftrightarrow |x + iy - 1| = |x + iy - 2i| \Leftrightarrow |(x - 1) + iy| = |x + i(y - 2)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = -4y + 4 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

Alltså gäller sambandet för alla $z = x + iy$ med $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$. I komplexa talplanet motsvarar detta alla z som ligger på linjen $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ (se figur, där vi också uppmärksammar att villkoret innebär att vi söker alla z som i komplexa talplanet ligger lika långt från punkterna (0,1) och (2,0)).



Svar: Alla z som ligger på linjen $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ (se figur).

5. a) $\sum_{k=1}^{n} 3^k = [\text{geometrisk summa med kvot} = 3 \text{ och antal termer} = n] = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.

Svar: $\frac{3}{2}(3^n - 1)$

b) $\sum_{k=1}^{50}(200 - 3k) = [\text{aritmetisk summa}] = \frac{50}{2}\big((200 - 3 \cdot 1) + (200 - 3 \cdot 50)\big) = 6175$

Svar: 6175

c)

$$\sum_{k=1}^{n}(200 - 3k) \leq 0 \Leftrightarrow [\text{aritmetisk summa}] \Leftrightarrow \frac{n}{2}\big((200 - 3 \cdot 1) + (200 - 3 \cdot n)\big) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n(197 + 200 - 3n)}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{397n}{2} - \frac{3n^2}{2} \leq 0 \Leftrightarrow n(397 - 3n) \leq 0 \Leftrightarrow [n > 0]$$

$$397-3n \le 0 \Leftrightarrow n \ge \frac{397}{3} = 132 + \frac{1}{3}$$

Alltså är summan ≤ 0 för alla heltal $n \ge 133$.

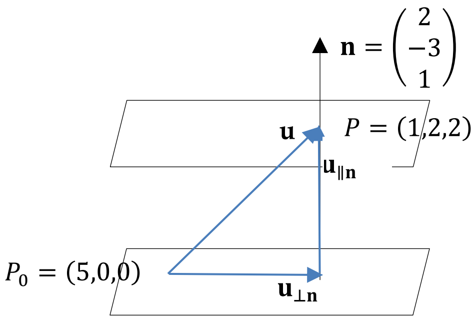
Svar: $n \ge 133$.

6. Plan I har normal $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Då skall det gälla att normalen är ortogonal mot planets båda riktningsvektorer. Vi har alltså villkoren

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2t \\ B = -3t \\ C = t \end{cases}$$

Alltså är $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en normal till plan I, och eftersom plan II har samma normal, innebär det att planen är parallella, v.s.v.

b) Vi ritar en figur där vi markerar en punkt (1,2,2) i plan I och en punkt (5,0,0) i plan II och låter $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Av figuren har vi att avståndet mellan planen ges av

$$\left|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}}\right| = [\text{projektionsformeln}] = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{6}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{6}{7}\sqrt{14}$$

Svar: Avståndet mellan planen är $\frac{6}{7}\sqrt{14}$ l.e.

7.

I. För $n = 1$ har vi $\mathrm{VL}(1) = x^1 = x$ och $\mathrm{HL}(1) = a_1x + a_0 = 1 \cdot x + 0 = x$

Alltså gäller formeln för $n = 1$.

För $n = 2$ har vi $\mathrm{VL}(2) = x^2 = x + 1$ och $\mathrm{HL}(2) = a_2x + a_1 = 1 \cdot x + 1 = x + 1$

Alltså gäller formeln för $n = 2$.

II. Vi antar att formeln gäller för $n = p$, p godtyckligt, $p \in \mathbb{Z}^+, p \ge 2$, d.v.s. vi antar att

$$\mathrm{VL}(p) = x^p = a_px + a_{p-1} = \mathrm{HL}(p)$$

Detta medför att

$$\mathrm{VL}(p+1) = x^{p+1} = x \cdot x^p = [\text{enligt antagandet}] = x(a_px + a_{p-1}) = a_px^2 + a_{p-1}x = [\text{ty } x^2 = x+1] =$$

$$= a_p(x+1) + a_{p-1}x = a_px + a_p + a_{p-1}x = \underbrace{(a_p + a_{p-1})}_{=a_{p+1}}x + a_p = a_{p+1}x + a_{(p+1)-1} = \mathrm{HL}(p+1)$$

Vi har alltså visat att om formeln gäller för $n = p$ så gäller den för $n = p + 1$.

III. Att formeln gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ följer nu av induktionsprincipen.

Anm 1: Ekvationen $x^2 = x + 1$ har lösningarna $\varphi_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eller $\varphi_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (jfr. ”Gyllene snittet”)
Med hjälp av formeln i vår uppgift kan man visa att $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\varphi_+)^n - (\varphi_-)^n)$ genom att ersätta x med φ_+ och φ_- på följande sätt:

$$A: (\varphi_+)^n = a_n\varphi_+ + a_{n-1}$$
$$B: (\varphi_-)^n = a_n\varphi_- + a_{n-1}$$

Ledvis subtraktion ger

$$(\varphi_+)^n - (\varphi_-)^n = a_n(\varphi_+ - \varphi_-) \Leftrightarrow a_n = \frac{(\varphi_+)^n - (\varphi_-)^n}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{(\varphi_+)^n - (\varphi_-)^n}{\sqrt{5}}$$

ty observera att $\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Formeln

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\varphi_+)^n - (\varphi_-)^n)$$

brukar kallas Binets formel, som alltså även kan skrivas

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Anm 2: Ekvationen $x^2 = x + 1$ utgör villkoret på x om vi delar en sträcka med längden $x + 1$ i två delar med längderna x respektive 1 och så att $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$.

Anm 2: Talen i den angivna talföljden är de s.k. Fibonaccitalen och vi ser ovan att dessa är kopplade till det gyllene snittet på så sätt att kvoten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergerar mot $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ för stora n (då $n \to \infty$).