

TSKS10 Signaler, information & Kommunikation

Föreläsning 10

Kommunikationslänkar, modulationsformer

Något tentatal

Mikael Olofsson

Institutionen för Systemteknik (ISY)

Ämnesområdet Kommunikationssystem

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, situation

- 4 En källkod för ett alfabet av storlek 8, med symbolerna a till h ur alfabetet, använder följande kodord och avbildning. (10 p)

$a \rightarrow 00$	$e \rightarrow 111$
$b \rightarrow 01$	$f \rightarrow 1100$
$c \rightarrow 100$	$g \rightarrow 11010$
$d \rightarrow 101$	$h \rightarrow 11011$

Symbolerna kommer från en minnesfri källa A med följande sannolikheter.

$\Pr\{A = a\} = 1/2,$	$\Pr\{A = e\} = 1/32,$
$\Pr\{A = b\} = 1/4,$	$\Pr\{A = f\} = 1/64,$
$\Pr\{A = c\} = 1/8,$	$\Pr\{A = g\} = 1/128,$
$\Pr\{A = d\} = 1/16,$	$\Pr\{A = h\} = 1/128$

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del a

- 4 En källkod för ett alfabet av storlek 8, med symbolerna a till h ur alfabetet, använder följande kodord och avbildning. (10 p)

$a \rightarrow 00$	$e \rightarrow 111$
$b \rightarrow 01$	$f \rightarrow 1100$
$c \rightarrow 100$	$g \rightarrow 11010$
$d \rightarrow 101$	$h \rightarrow 11011$

Symbolerna kommer från en minnesfri källa A med följande sannolikheter.

Källan

$\Pr\{A = a\} = 1/2,$	$\Pr\{A = e\} = 1/32,$
$\Pr\{A = b\} = 1/4,$	$\Pr\{A = f\} = 1/64,$
$\Pr\{A = c\} = 1/8,$	$\Pr\{A = g\} = 1/128,$
$\Pr\{A = d\} = 1/16,$	$\Pr\{A = h\} = 1/128$

- a. Bestäm entropin för källan. (2 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del a – lösning

$$\Pr\{A = a\} = 1/2,$$

$$\Pr\{A = b\} = 1/4,$$

$$\Pr\{A = c\} = 1/8,$$

$$\Pr\{A = d\} = 1/16,$$

$$\Pr\{A = e\} = 1/32,$$

$$\Pr\{A = f\} = 1/64,$$

$$\Pr\{A = g\} = 1/128,$$

$$\Pr\{A = h\} = 1/128$$

Entropin för källan ges av

$$\begin{aligned} H(A) &= -\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) \\ &\quad - \frac{1}{16} \log_2 \left(\frac{1}{16} \right) - \frac{1}{32} \log_2 \left(\frac{1}{32} \right) \\ &\quad - \frac{1}{64} \log_2 \left(\frac{1}{64} \right) - 2 \cdot \frac{1}{128} \log_2 \left(\frac{1}{128} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{64} \\ &= \frac{32 + 32 + 24 + 16 + 10 + 13}{64} = \frac{127}{64} \end{aligned}$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del b

- 4 En källkod för ett alfabet av storlek 8, med symbolerna a till h ur alfabetet, använder följande kodord och avbildning. **Längderna** (10 p)

a → 00	2	e → 111	3
b → 01	2	f → 1100	4
c → 100	3	g → 11010	5
d → 101	3	h → 11011	5

Symbolerna kommer från en minnesfri källa A med följande sannolikheter.

$$\Pr\{A = a\} = 1/2,$$

$$\Pr\{A = b\} = 1/4,$$

$$\Pr\{A = c\} = 1/8,$$

$$\Pr\{A = d\} = 1/16,$$

$$\Pr\{A = e\} = 1/32,$$

$$\Pr\{A = f\} = 1/64,$$

$$\Pr\{A = g\} = 1/128,$$

$$\Pr\{A = h\} = 1/128$$

- b. Bestäm väntevärdet av kodordslängden. (2 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del b – lösning

a → 00

2

b → 01

2

c → 100

3

d → 101

3

e → 111

3

f → 1100

4

g → 11010

5

h → 11011

5

$$L = \begin{cases} 2, & A \in \{a, b\} \\ 3, & A \in \{c, d, e\} \\ 4, & A \in \{f\} \\ 5, & A \in \{g, h\} \end{cases}$$

Låt L beteckna kodordslängden. Det är en stokastisk variabel som är en funktion av källan A via avbildningen till kodorden, enligt följande.

Då har vi

$$\Pr\{L=2\} = \Pr\{A=a\} + \Pr\{A=b\} = 3/4,$$

$$\Pr\{L=3\} = \Pr\{A=c\} + \Pr\{A=d\}$$

$$+ \Pr\{A=e\} = 7/32,$$

$$\Pr\{L=4\} = \Pr\{A=f\} = 1/64,$$

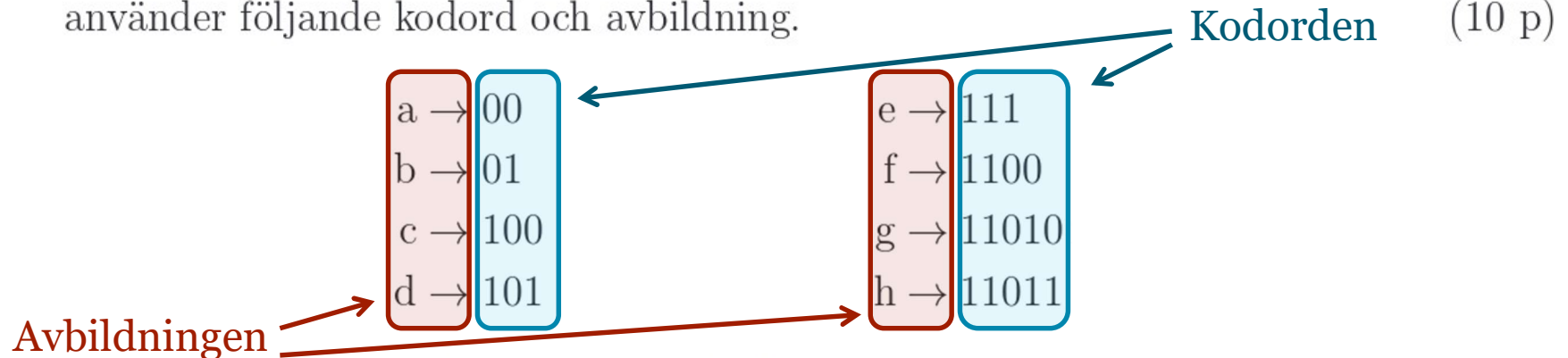
$$\Pr\{L=5\} = \Pr\{A=g\} + \Pr\{A=h\} = 1/64.$$

Väntevärdet ges då av

$$\begin{aligned} E\{L\} &= \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{7}{32} \cdot 3 + \frac{1}{64} \cdot 4 + \frac{1}{64} \cdot 5 \\ &= \frac{96 + 42 + 4 + 5}{64} = \frac{147}{64} \end{aligned}$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del c

- 4 En källkod för ett alfabet av storlek 8, med symbolerna a till h ur alfabetet, använder följande kodord och avbildning. (10 p)



Symbolerna kommer från en minnesfri källa A med följande sannolikheter.

Källan

$\Pr\{A = a\} = 1/2,$	$\Pr\{A = e\} = 1/32,$
$\Pr\{A = b\} = 1/4,$	$\Pr\{A = f\} = 1/64,$
$\Pr\{A = c\} = 1/8,$	$\Pr\{A = g\} = 1/128,$
$\Pr\{A = d\} = 1/16,$	$\Pr\{A = h\} = 1/128$

- c. Givet kodorden och källan ovan, är detta en bra avbildning av symbolerna på kodorden? Om inte, föreslå en annan avbildning, och visa att den är bättre än den givna avbildningen. (2 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del c – lösning

a → 00
b → 01
c → 100
d → 101

e → 111
f → 1100
g → 11010
h → 11011

$\Pr\{A = a\} = 1/2,$
 $\Pr\{A = b\} = 1/4,$
 $\Pr\{A = c\} = 1/8,$
 $\Pr\{A = d\} = 1/16,$

$\Pr\{A = e\} = 1/32,$
 $\Pr\{A = f\} = 1/64,$
 $\Pr\{A = g\} = 1/128,$
 $\Pr\{A = h\} = 1/128$

Symbolerna sorterade i sannolikhetsordning från högst sannolikhet till lägst sannolikhet, och sedan avbildat på kodorden enligt den givna avbildningen ger oss kodorden i storleksordning från minsta till största längd. Varje försök att ändra den avbildningen till en annan 1-till-1-avbildning ger antingen samma väntevärde på kodordslängden eller ett högre väntevärde. De fall där kodord byts mot kodord av samma längd ger oförändrat väntevärde, medan de fall då kodord byts mot kodord av olika längd, så blir väntevärdet större. Givet kodorden och källan ifråga så är avbildningen bra i den meningen att det inte finns någon avbildning som resulterar i en lägre förväntad kodordslängd.

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del d

- 4 En källkod för ett alfabet av storlek 8, med symbolerna a till h ur alfabetet, använder följande kodord och avbildning. (10 p)

a → 00	e → 111
b → 01	f → 1100
c → 100	g → 11010
d → 101	h → 11011

Koden

Symbolerna kommer från en minnesfri källa A med följande sannolikheter.

$\Pr\{A = a\} = 1/2,$	$\Pr\{A = e\} = 1/32,$
$\Pr\{A = b\} = 1/4,$	$\Pr\{A = f\} = 1/64,$
$\Pr\{A = c\} = 1/8,$	$\Pr\{A = g\} = 1/128,$
$\Pr\{A = d\} = 1/16,$	$\Pr\{A = h\} = 1/128$

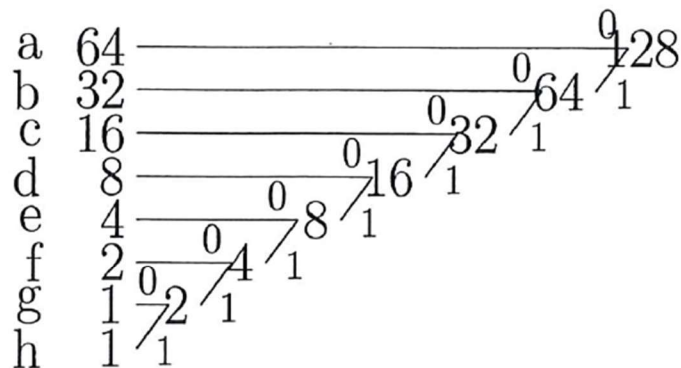
Källan

- d. Är detta en bra kod för denna källa? Om inte, föreslå en annan källkod, och visa att den är bättre än den givna koden. (4 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 4, del d – lösning

Vi har $H(A) < E\{L\}$. Då finns det en möjlighet att det existerar en bättre kod, dvs. en som ger oss en lägre förväntad kodordslängd. Vi kör Huffman-algoritmen på den givna källans sannolikheter. Siffrorna anger 128-delar.

Av detta får vi kodorden och avbildningen



$a \rightarrow 0$	$e \rightarrow 11110$
$b \rightarrow 10$	$f \rightarrow 111110$
$c \rightarrow 110$	$g \rightarrow 1111110$
$d \rightarrow 1110$	$h \rightarrow 1111111$

Vi noterar att kodordslängden för varje symbol ges av $-\log_2(p)$, där p är sannolikheten för symbolen ifråga. Följden blir att $E\{L\}$ ges av precis samma uttryck som $H(A)$, och alltså har vi för denna kod och denna källa $E\{L\} = H(A)$. Detta är alltså en bättre kod än den givna.

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del a

- 5 Följande kod är avsedd för felrättning. Det är ett exempel på en väldigt kort så kallad terminerad faltningskod, där vi också angivit en avbildning från informationsbitarna till kodorden. (6 p)

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

- a. Bestäm kodens takt. (1 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del a - lösning

a. Bestäm kodens takt.

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

$M = 8$

$N = 8$

Vi har alltså takten

$$R = \frac{\log_2(M)}{N} = \frac{3}{8}$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del b

- 5 Följande kod är avsedd för felrättning. Det är ett exempel på en väldigt kort så kallad terminerad faltningskod, där vi också angivit en avbildning från informationsbitarna till kodorden. (6 p)

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

- b. Bestäm kodens förmåga att detektera respektive korrigera fel. (3 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del b – lösning

b. Bestäm kodens förmåga att detektera respektive korrigera fel. (3 p)

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

Kodens förmåga att detektera och korrigera fel bestäms av dess minavstånd. Genom att jämföra kodorden med varandra, så ser vi att inga par av kodord skiljer sig åt i mindre än tre positioner, och det finns par av kodord som skiljer sig åt i exakt tre positioner, exempelvis 00000000 och 00000111.

Minavståndet är alltså $d_{\min} = 3$. Fel-detektionsförmågan v och felrättningsförmågan t ges då av

$$v = d_{\min} - 1 = 2, \quad t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1.$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del c

- 5 Följande kod är avsedd för felrättning. Det är ett exempel på en väldigt kort så kallad terminerad faltningskod, där vi också angivit en avbildning från informationsbitarna till kodorden. (6 p)

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

- c. Föreslå ett enkelt sätt att skapa en kod vars takt är större än takten för denna kod, men som fortfarande har samma storlek och samma förmåga att detektera och korrigera fel. (1 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del c - lösning

- c. Föreslå ett enkelt sätt att skapa en kod vars takt är större än takten för denna kod, men som fortfarande har samma storlek och samma förmåga att detektera och korrigera fel. (1 p)

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

Uppenbarligen är den första biten i kodorden onödig, då den är lika i alla kodord. Den bidrar därför inte till att skilja kodorden åt. Genom att ta bort denna bit skapar vi en kod med

$$N = 7, \quad M = 8, \quad d_{\min} = 3.$$

Resultterande takt ges då av

$$R = \frac{\log_2(M)}{N} = \frac{3}{7} > \frac{3}{8}$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del d

- 5 Följande kod är avsedd för felrättning. Det är ett exempel på en väldigt kort så kallad terminerad faltningskod, där vi också angivit en avbildning från informationsbitarna till kodorden. (6 p)

Info			Kodord							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1

- d. Koden används för kommunikation över en binärsymmetrisk kanal med felsannolikhet ε . Ungefär hur ser sannolikheten för fel efter avkodningen ut? Beroendet av ε ska ges i storleksordning. (1 p)

Tenta 2015-06-01, uppgift 5, del d - lösning

- d. Koden används för kommunikation över en binärsymmetrisk kanal med felsannolikhet ε . Ungefär hur ser sannolikheten för fel efter avkodningen ut? Beroendet av ε ska ges i storleksordning. (1 p)

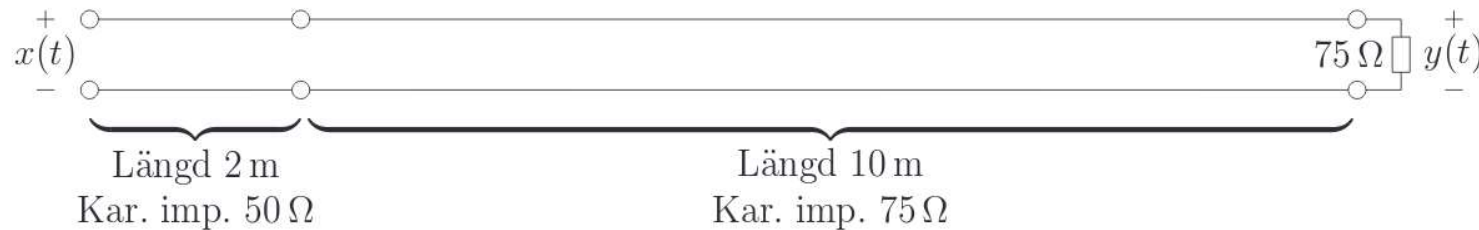
Från del b: Minavståndet är alltså $d_{\min} = 3$.

Felsannolikheten P_e är i storleksordning

$$P_e \sim \varepsilon^{\lceil d_{\min}/2 \rceil} = \varepsilon^2.$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 6

- 6 En 10 m lång kabel med karakteristisk impedans 75Ω används för kommunikation av information till en utrustning som är avsedd för just en sådan kabel. På sändarsidan appliceras spänningen $x(t)$. På mottagarsidan observeras spänningen $y(t)$ över en resistans på 75Ω . Kabeln behövde skarvas och av misstag eller ovetskap så valdes en 2 m lång kabel med karakteristisk impedans 50Ω för detta. Resultatet beskrivs i figuren nedan. (9 p)

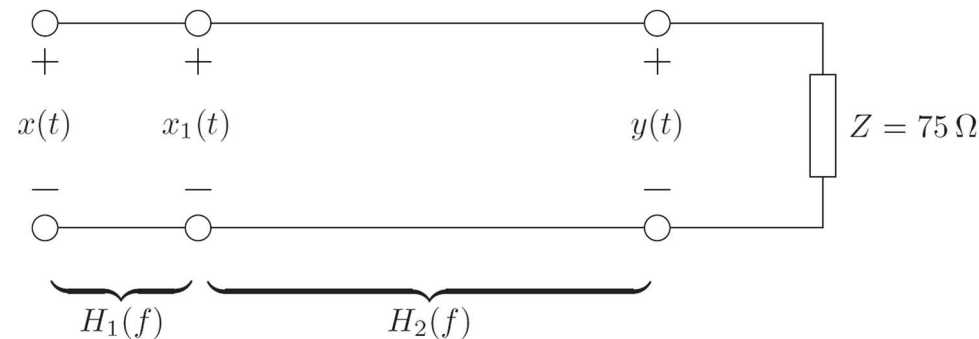


- a. Bestäm frekvenssvaret hos systemet ovan. (6 p)
- b. Vad skulle frekvenssvaret ha varit om man hade valt rätt sorts kabel att skarva med? (3 p)

Not: Du behövera antagligen införa några beteckningar för att lösa denna uppgift, beteckningar som också behövs i ditt svar. Gör då det med omsorg.

Tenta 2015-06-01, uppgift 6, intro lösning 1

Vi har situationen nedan, där kabeln med frekvenssvar $H_1(f)$ har karakteristisk impedans Z_{c1} och kabeln med frekvenssvar $H_2(f)$ har karakteristisk impedans Z_{c2} .



I figuren anges förutom frekvenssvar också spänningarna $x(t)$, $x_1(t)$ och $y(t)$, där $x(t)$ är insignal och $y(t)$ är utsignal, samt där $x_1(t)$ betecknar spänningen i kopplingen mellan de två kablarna. Genomgående använder vi i denna lösning index $i = 1$ för sådant som har med den första delen av kabeln att göra, och index $i = 2$ för sådant som har med den andra delen av kabeln att göra.

Tenta 2015-06-01, uppgift 6, intro lösning 2

är givna kablarnas karakteristiska impedanser, men inte de egenskaper hos kablarna som ger upphov till dessa impedanser. Vi behöver beteckningar för dem. Inspirerade av resonemanget på sidorna **147-154** i kursboken så inför vi följande beteckningar för kabel nummer i :

- L_{si} : Serieinduktans per meter
- G_{pi} : Parallellkonduktans per meter
- C_{pi} : Parallellkapacitans per meter

Utifrån dessa definierar vi serieimpedansen $a_i(f)$ och parallelladmittansen $b_i(f)$ per meter kabel för kabel nummer i enligt

$$\begin{aligned}a_i(f) &= R_{si} + j2\pi f L_{si}, \\ b_i(f) &= G_{pi} + j2\pi f C_{pi}.\end{aligned}$$

Vi

För de karakteristiska impedanserna gäller nu enligt ekvation 8.14 på sidan **151** i kursboken,

$$Z_{ci} = \sqrt{\frac{a_i(f)}{b_i(f)}} = \begin{cases} 50 \Omega, & i = 1, \\ 75 \Omega, & i = 2, \end{cases}$$

där siffrorna var givna i uppgiftsformuleringen. Slutligen var vi givna kabellängderna

$$L_1 = 2 \text{ m} \quad \text{och} \quad L_2 = 10 \text{ m}$$

för de två kablarna.

Tenta 2015-06-01, uppgift 6, del a, lösning

Hänvisningarna till ekvationer i kursboken gäller upplagan 2021.

- a. Låt oss först betrakta den andra kabeldelen, den med frekvenssvar $H_2(f)$. Eftersom dess last är matchad till kabeln ($Z = Z_{c2}$), så gäller ekvation 8.24 på sidan 153 i kursboken, som uttryckt i våra beteckningar lyder

$$H_2(f) = e^{-\sqrt{R_{s2}G_{p2}} \cdot L_2} \cdot e^{-j\sqrt{L_{s2}C_{p2}} \cdot 2\pi f \cdot L_2}.$$

Kvar har vi nu att betrakta den första kabeldelen, den med frekvenssvar $H_1(f)$. Dess belastning är Z_{c2} , eftersom andra delen av kabeln är belastad av en matchad last. Då gäller inget av specialfallen i kursboken, utan för denna del får vi använda oss av uttrycket i ekvation 8.13 på sidan 151, som med våra beteckningar lyder

$$H_1(f) = \frac{2}{\left(1 - \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\right) e^{-\sqrt{a_1(f)b_1(f)} \cdot L_1} + \left(1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\right) e^{\sqrt{a_1(f)b_1(f)} \cdot L_1}}$$

Det totala frekvenssvaret $H(f)$, med insatta värden

$$\begin{aligned} H(f) &= H_1(f)H_2(f) \\ &= \frac{6e^{-\sqrt{R_{s2}G_{p2}} \cdot 10} \cdot e^{-j\sqrt{L_{s2}C_{p2}} \cdot 2\pi f \cdot 10}}{e^{-\sqrt{a_1(f)b_1(f)} \cdot 2} + 5e^{\sqrt{a_1(f)b_1(f)} \cdot 2}} \end{aligned}$$

Tenta 2015-06-01, uppgift 6, del b, lösning

- b. Om man hade valt rätt sorts kabel att skarva med, så skulle det ha varit en med karakteristisk impedans Z_{c2} . Då hade vi haft en kabel av längd $L = L1 + L2$ med karakteristisk impedans Z_{c2} , som är belastad med en matchad last $Z = Z_{c2} = 75 \Omega$, som alltså är reell. Då gäller specialfallet i ekvation 8.24 på sidan 153 i kursboken för hela kabeln, som då alltså har frekvenssvaret

$$H(f) = e^{-\sqrt{R_{s2}G_{p2}} \cdot L} \cdot e^{-j\sqrt{L_{s2}C_{p2}} \cdot 2\pi f \cdot L}.$$

Med insatta värden på det vi känner blir det

$$H(f) = e^{-\sqrt{R_{s2}G_{p2}} \cdot 12} \cdot e^{-j\sqrt{L_{s2}C_{p2}} \cdot 2\pi f \cdot 12}.$$

Tenta 2017-08-15, uppgift 5

En signal $y(t) = x(t) + \omega(t)$ består av en deterministisk signal $x(t)$, störd av vitt brus $\omega(t)$. Mottagaren består av ett signalanpassat filter följt av sampling i rätt tidpunkt, och resulterande SNR är då 25 dB. I de fyra fallen nedan, ange motsvarande signalanpassade filter och bestäm resulterande SNR.

- a. $3(x(t) + \omega(t))$. (1p)
- b. $3x(t) + \omega(t)$. (2p)
- c. $x(3t) + \omega(t)$. (2p)
- d. $x(t - 3) + \omega(t)$. (2p)

Se avsnitt 4.2 i kursboken

Tenta 2017-08-15, uppgift 5, del a & b, lösning

Vi har alltså en signal $x(t) + \omega(t)$ som består av en deterministisk signal $x(t)$, störd av vitt brus $\omega(t)$. Mottagaren består av ett signalanpassat filter följt av sampling i rätt tidpunkt, och resulterande SNR är då 25 dB. Låt genomgående $y(t)$ beteckna den nya nyttsignalen för de fyra fallen nedan, och låt $h(t)$ beteckna motsvarande signalanpassade filter.

- a. För signalen $3(x(t) + \omega(t))$, så förstärks både signalen och bruset med samma faktor (3). Då skalas motsvarande energier med kvadraten av det, alltså 9. I SNR-kvoten så tar dessa nior ut varandra, och resulterande SNR är fortfarande 25 dB.

Nyttsignalen är nu $y(t) = 3x(t)$. Motsvarande signalanpassade filter är enligt ekvation 4.19 på sidan 65 i SIC (2021)

$$h(t) = y(-t) = 3x(-t) \quad (2)$$

- b. För signalen $3x(t) + \omega(t)$, så förstärks signalen med faktorn 3, medan bruset inte skalas alls. Signalens energi skalas förstås även här med kvadraten av det, alltså 9. SNR blir då 9 gånger större. Uttryckt i dB blir det en ökning med $10 \log_{10}(9)$, vilket är knappt 10 dB. Resulterande SNR är då alltså knappt 35 dB, vilket duger som svar.

Vill man vara lite mer exakt, så kan man från formelbladet hitta sambanden

$$\log_2(10) \approx 3.32,$$

$$\log_2(3) \approx 1.59.$$

Förhållandet mellan logaritmer med olika bas ger oss då

$$\begin{aligned} 10 \log_{10}(9) &= 10 \frac{\log_2(9)}{\log_2(10)} = 10 \frac{2 \log_2(3)}{\log_2(10)} \\ &\approx 10 \frac{2 \cdot 1.59}{3.32} \approx 9.6 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Och då är resulterande SNR ungefär 34.6 dB.

Precis som i deluppgift a, så är nyttsignalen $y(t) = 3x(t)$, och motsvarande signalanpassade filter är förstås fortfarande

$$h(t) = 3x(-t) \quad (3)$$

Tenta 2017-08-15, uppgift 5, del c & d, lösning

- c. För signalen $x(3t) + \omega(t)$ så har vi nyttsignalen $y(t) = x(3t)$, och alltså har vi motsvarande signalanpassade filter

$$h(t) = y(-t) = x(-3t) \quad (4)$$

Låt SNR_x och SNR_y vara signal-brusförhållandena för signalerna $x(t) + \omega(t)$ respektive $y(t) + \omega(t)$. Låt vidare σ^2 vara spektraltätheten för bruset $\omega(t)$. Då har vi om filtrena i de två fallen är anpassade, enligt resonemanget kring ekvationerna 4.18 och 4.19 på sidan 65 i SIC (2021),

$$\text{SNR}_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt}{\sigma^2} \quad (5)$$

och

$$\text{SNR}_y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt}{\sigma^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(3t) dt}{\sigma^2} \quad (6)$$

Variabelbytet $u = 3t$ ger oss

$$\text{SNR}_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(u) du}{\sigma^2} = \frac{1}{3} \text{SNR}_x \quad (7)$$

Då 3 är knappt $\sqrt{(10)}$, så blir detta uttryckt i dB en minskning med knappt 5 dB, och alltså är resulterande SNR drygt 20 dB, vilket duger som svar.

Med samma metodik som i deluppgift b, så har vi

$$\begin{aligned} 10 \log_{10}(1/3) &= 10 \frac{\log_2(1/3)}{\log_2(10)} \\ &\approx 10 \frac{-1.59}{3.32} \approx -4.8 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Och då är resulterande SNR ungefär 20.2 dB.

- d. För signalen $x(t - 3) + \omega(t)$, så förstärks varken signalen eller bruset. Att signalen tidsförskjuts har ingen inverkan på energin. Följaktligen är SNR oförändrat 25 dB.

Nyttosignalen är nu $y(t) = x(t - 3)$. Motsvarande signalanpassade filter är enligt ekvation 4.19 på sidan 65 i SIC (2021)

$$h(t) = y(-t) = 3x(-t - 3) \quad (8)$$

Mikael Olofsson
ISY/CommSys

www.liu.se