TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 4

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Idag

Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för minkostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

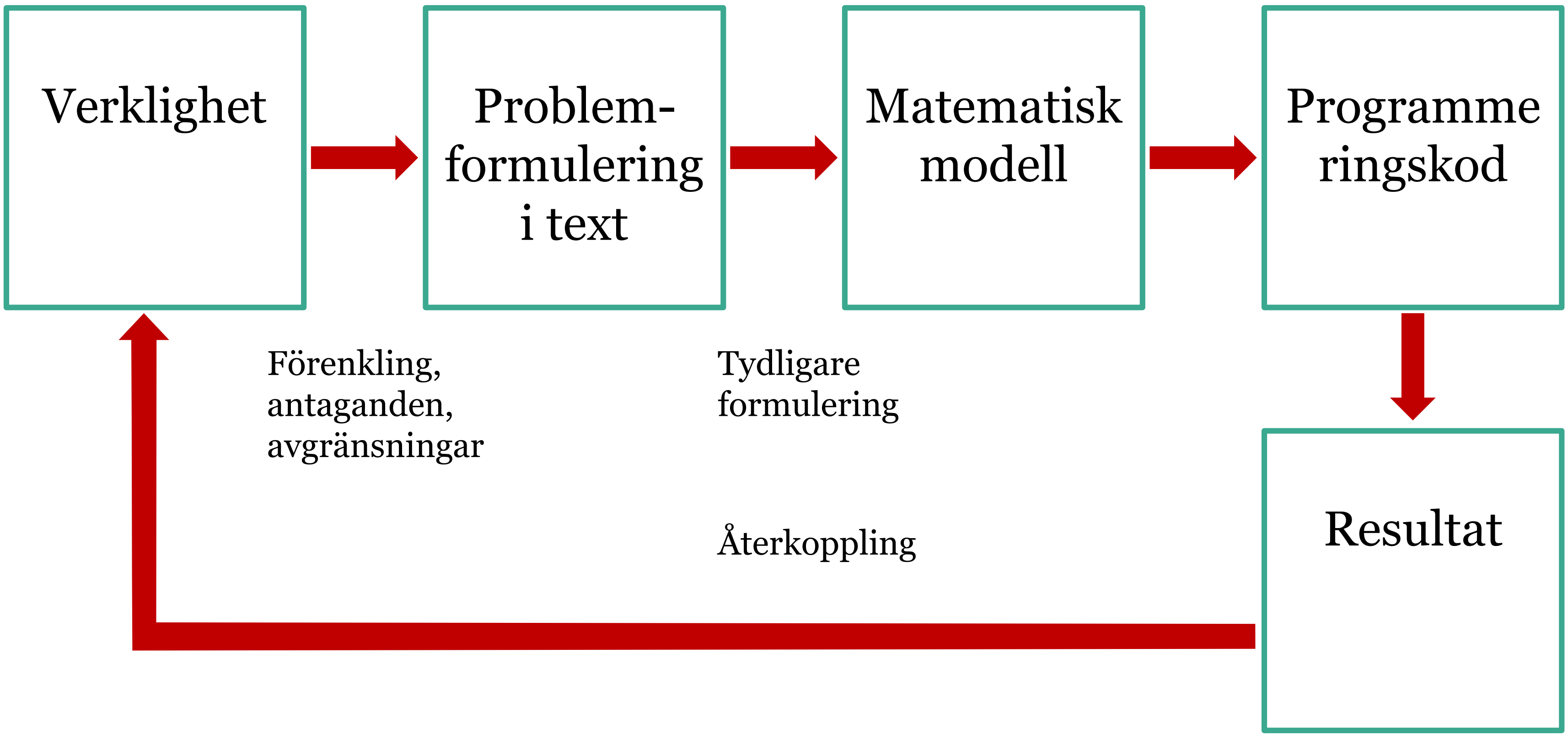
Agenda

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
    - Lokaliseringsproblem
    - Tillordningsproblem
    - Kappsäcksproblem
    - Logiska villkor

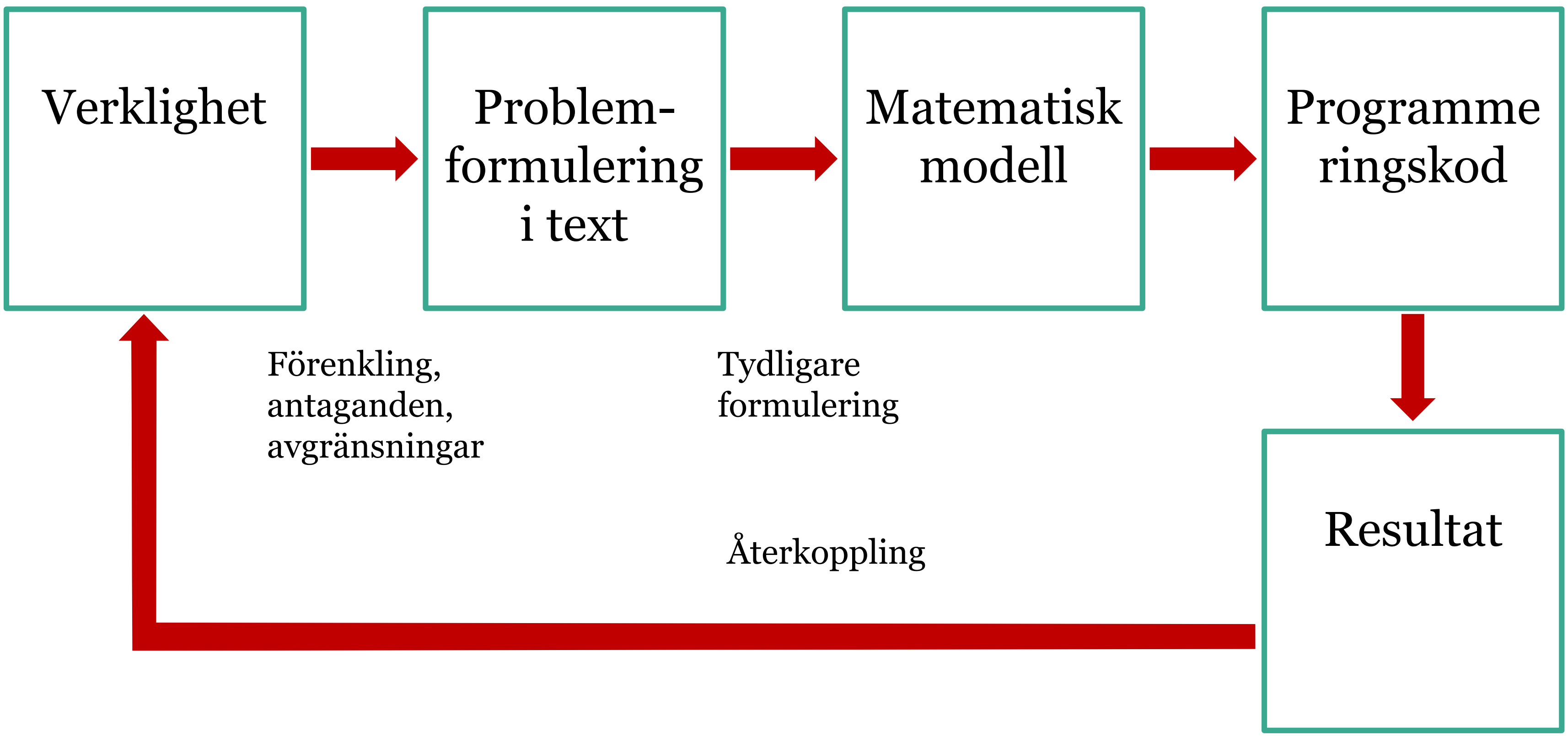
Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP

Modell: repetition



Idag


Verklighet
Problem-formulering i text
Matematisk modell
Programmeringskod
Resultat
Förenkling, antaganden, avgränsningar
Tydligare formulering
Återkoppling

Problemklassificering

- Linjärprogrammering (LP)
  - Alla samband (målfunktionen, bivillkoren) är linjära
- Ickelinjär programmering
  - Vissa av sambanden är ickelinjära
- Heltalsproblem
  - Kan tillhöra båda kategorierna
  - Alla/några av variablerna kan bara anta diskreta värden
- Nätverksproblem
  - Tydlig struktur
  - Ofta geografiska
- Med mera…

Idag

- Linjärprogrammering (LP)
  - Alla samband (målfunktionen, bivillkoren) är linjära
- Ickelinjär programmering
  - Vissa av sambanden är ickelinjära
- Heltalsproblem
  - Kan tillhöra båda kategorierna
  - Alla/några av variablerna kan bara anta diskreta värden
- Nätverksproblem
  - Tydlig struktur
  - Ofta geografiska
- Med mera…

Agenda

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
  - Lokaliseringsproblem
  - Tillordningsproblem
  - Kappsäcksproblem
  - Logiska villkor

Heltalsmodeller – varför?

- Används exempelvis vid
  - Fasta kostnader
  - Ja/Nej beslut
  - Logiska villkor
  - Endast vissa variabler tillåtna
    - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
    - 1, 6, 23, 45
- Exempel på problemtyper
  - Lokaliseringsproblem
  - Tillordningsproblem
  - Kappsäcksproblem

Heltalsmodeller – varför?

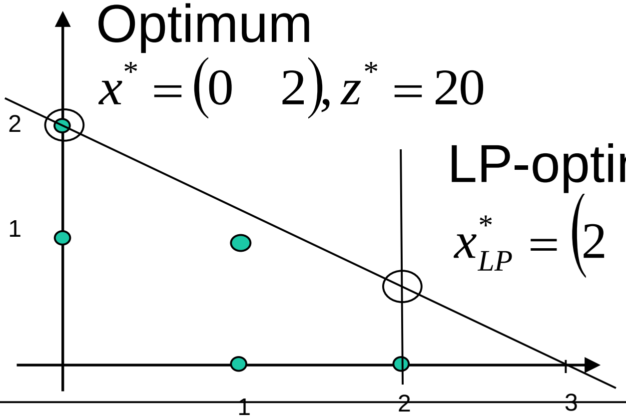
Ett företag ska köpa in nya maskiner till sin produktion

- Två olika maskiner kan köpas in: en kostar 20 000kr, en annan 30 000kr.
- Maskinkapaciteten är 9 resp. 10 enheter per timme.
- Företaget kan investera maximalt 60 000kr.
- Max två av de billigare maskinerna kan köpas.

Hur ska företaget göra sina inköp för att maximerna kapaciteten?

Två variabler: x_1 och x_2 = antalet billiga respektive dyra maskiner som köps in

$$\begin{aligned} \max\ & 9x_1 + 10x_2 \\ \text{då}\ & 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \text{heltal} \end{aligned}$$



Optimum

$x^* = (0 \quad 2), z^* = 20$

LP-optimum

$x_{LP}^* = \left(2 \quad \tfrac{2}{3}\right), z_{LP}^* = 24\tfrac{2}{3}$

Agenda

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel :
    - Lokaliseringsproblem
    - Tillordningsproblem
    - Kappsäcksproblem
    - Logiska villkor

Lokaliseringsproblem

- Vi skall bygga en eller två fabriker och har tre platser att välja på: Linköping, Linghem, Norrköping. Fabrikerna kan vara små eller stora. Kapaciteten på en liten fabrik kallas f ton/år och på en stor g ton/år. Vi skall försörja marknaden i Finspång med hjälp av fabrikerna. Efterfrågan i Finspång är e ton/år. Den årliga avskrivningskostnaden är a kr/år för en liten fabrik och b kr/år för en stor fabrik. Antag att produktionskostnaden är samma i alla fabriker. Transportkostnaden antas proportionell mot avstånd och transporterad mängd, c kr/ton*km. Avstånden från respektive produktionsort till Finspång är 68 km (Linköping), 47 km (Linghem) och 31 km (Norrköping). Endast en fabrik kan byggas på varje ort.
- Var skall vi bygga fabriker, av vilka storlekar, och hur mycket skall produceras/transporteras i varje fabrik; för att minimera totala kostnaden?

Agenda

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel :

    Lokaliseringsproblem
    Tillordningsproblem
    Kappsäcksproblem
    Logiska villkor

Tillordningsproblem

Ett företag har fem jobb som ska göras av någon av de tre arbetarna. Varje arbetare har olika kompetens och kan utföra varje arbete olika snabbt. Tiden i timmar det tar för varje arbetare att utföra varje jobb ges i tabellen nedan, samt max tillgänglig tid för varje arbetare. Företaget vill minimera den totala tidsåtgången det tar att utföra de fem jobben.

	Arbetare		
Jobb	**A**	**B**	**C**
1	8	10	11
2	3	8	5
3	10	12	11
4	6	13	9
5	4	9	8
Tillgänglig tid	**20**	**30**	**18**

Agenda

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel :

  Lokaliseringsproblem
  Tillordningsproblem
  Kappsäcksproblem
  Logiska villkor

Kappsäcksproblem

- Ett antal varor, N, ska packas ner i en kappsäck, vi vill maximera värdet av varorna som packas ner i kappsäcken, samtidigt som vi inte kan packa ner mer än vad volymen på kappsäcken tillåter.
- Variabeldefinition: x_j =antal av vara *j* som packas ner i kappsäcken
- Parametrar:
- c_j = värdet på vara *j*
- a_j = storlek på vara *j*
- b = storlek på kappsäcken

$$\max z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

$$då \quad \sum_{j=1}^{N} a_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0, heltal \;\; , \;\; j = 1 \ldots N$$

Kappsäcksproblem

Ett byggbolag har tillgänglig mark för att starta 6 olika byggprojekt under den kommande planeringsperioden. Varje projekt förväntas ge vinsten 10, 20, 30, 15, 23, 12 mkr. Samtidigt har företaget en begränsad kassa att använda till att investera i projekten och en begränsade produktionsresurser (personal, maskiner, ledning etc.). Resursförbrukning (kassa och produktion) ges i tabellen nedan, tillsammans med tillgängliga resurser.

Formulera företagets problem att välja ut vilka projekt som ska genomföras så att vinsten maximeras.

Projekt	Kassa (mkr)	Produktion (resursenheter)
1	235	10
2	123	12
3	178	15
4	210	23
5	256	17
6	123	9
Tillgängliga resurser	**800**	**50**

Agenda

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel :

  Lokaliseringsproblem
  Tillordningsproblem
  Kappsäcksproblem
  Logiska villkor

Logiska villkor, övning

- Antag variabeldefinitionen:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ om händelse } i \text{ inträffar, } i \in \{A, B, C\} \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

- Modellera:
  - Högst en av händelse A,B och C får inträffa
  - Exakt en av händelser A,B och C måste inträffa
  - Om A händer måste minst en av B eller C inträffa
  - Om B eller C (eller båda) händer måste A inträffa

YouTube

Tips på filmer:

- https://youtu.be/kSoya2fb9qw
- https://youtu.be/5sS_gf-yE74
- https://youtu.be/dKsGtIq2Af0
- https://youtu.be/KKswYyTaCX0

De går igenom samma exempel som jag presenterat i den här föreläsningen, men med modelldesign och variabelnamn som är lite annorlunda.

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET