Lösningar

1. Uppgiften löses enklast i koordinatsystemet O' som följer med bil A istället för i det markbundna koordinatsystemet O. O' har den konstanta hastigheten $\bar{V} = v_0\hat{x}$ i förhållande till O. Sätt $t = 0$ då omkörningen startar. I O' blir $\bar{r}'_B(t=0) = -d\hat{x}$. Sätt $t = t_1$ då omkörningen är klar. I O' blir $\bar{r}'_B(t=t_1) = d\hat{x}$. Accelerationen $\bar{a}'_B = \bar{a}_B = a\hat{x}$ eftersom $\bar{V}$ är konstant.

I $\hat{x}$-led:

$$\dot{v}'_B = a \Rightarrow v'_B = at + C;\ v'(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v'_B = at$$

$$\dot{x}'_B = v'_B = at \Rightarrow x'_B = a\frac{t^2}{2} + D;\ x'_B(t=0) = -d \Rightarrow D = -d \Rightarrow x'_B = a\frac{t^2}{2} - d$$

$$x'_B(t=t_1) = a\frac{t_1^2}{2} - d = d \Rightarrow t_1 = 2\sqrt{\frac{d}{a}}$$

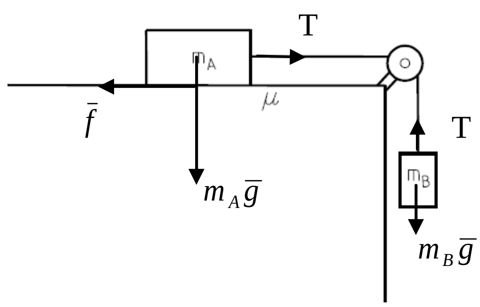
Bil A har under tiden t_1 kört sträckan $v_0t_1 = 2v_0\sqrt{\frac{d}{a}}$

Omkörningssträckan blir $2d + 2v_0\sqrt{\frac{d}{a}}$

Svar: Omkörningssträckan blir $2d + 2v_0\sqrt{\frac{d}{a}}$

---

2. Newtons 2:a lag för den övre massan i vertikalled:



$\hat{y}\_led : m_A g = F_N$

För horisontell rörelse (obs! rörelse åt höger)

$\hat{x}\_led$:

$T - f = m_A a$

$f = \mu F_N$

Eliminera normalkraften F_N. Detta ger

$T - \mu F_N = T - \mu m_A g = m_A a$ (1)

Newtons 2:a lag för nedre massan (obs! rörelse nedåt)

$\hat{y}\_led : T - m_B g = -m_B a$

Detta med (1) ger

$m_A a + \mu m_A g - m_B g = -m_B a$

$$a = \frac{m_B g - \mu m_A g}{m_A + m_B} = \frac{8 - 0.25 \cdot 12}{12 + 8} 9.81 = 2.45 \text{ m/s}^2$$

Svar: 2.45 m/s^2.

---

3. $\bar{F} = m\bar{a}$ **a.** Kraftekvationen $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F} = (\frac{F_0}{m} - \frac{k}{m}t)\hat{x}$

b. $\dot{\bar{v}} = \bar{a} \Rightarrow \bar{v} = \int \bar{a}dt = \int (\frac{F_0}{m} - \frac{k}{m}t)\hat{x}dt = (\frac{F_0}{m}t - \frac{k}{2m}t^2 + v_0)\hat{x}$

c. $\dot{\bar{r}} = \bar{v} \Rightarrow \bar{r} = \int \bar{v}dt = \int (\frac{F_0}{m}t - \frac{k}{2m}t^2 + v_0)\hat{x}dt = (\frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{k}{6m}t^3 + v_0 t + x_0)\hat{x}$

Svar: **a**. $\bar{a} = (\frac{F_0}{m} - \frac{k}{m}t)\hat{x}$ **b**. $\bar{v} = (\frac{F_0}{m}t - \frac{k}{2m}t^2 + v_0)\hat{x}$

c. $\bar{r} = (\frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{k}{6m}t^3 + v_0 t + x_0)\hat{x}$

---

4. **a**. Kraftekvationen $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{m}\bar{F} = -\frac{k}{m}x\hat{x}$

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\cdot v_x = \frac{d}{dx}(\frac{v_x^2}{2})$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{v_x^2}{2}) = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{v_x^2}{2} = -\frac{k}{2m}x^2 + C$$

$v_x(t=0) = v_0$ och $x(t=0) = x_0 \Rightarrow C = \frac{v_0^2}{2} + \frac{k}{2m}x_0^2$

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(x^2 - x_0^2)}$$

b. $\frac{d}{dx}(\frac{v_x^2}{2}) = -\frac{k}{m}x^{-2} \Rightarrow \frac{v_x^2}{2} = \frac{k}{m}x^{-1} + C$

$v_x(t=0) = v_0$ och $x(t=0) = x_0 \Rightarrow C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{m}x_0^{-1}$

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m}(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x})}$$

Svar: **a**. $\bar{v}(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(x^2 - x_0^2)}\hat{x}$; **b**. $\bar{v}(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m}(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x})}\hat{x}$

---

5. **a.** $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \dot{\bar{v}} = -\frac{A}{m}\bar{v}$

I $\hat{x}$-led: $\frac{dv_x}{dt} + \frac{A}{m}v_x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(v_x e^{\frac{A}{m}t}) = 0 \Rightarrow v_x(t) = v_0 e^{-\frac{A}{m}t}$

b. $v_x(t = t_1) = v_0 e^{-\frac{A}{m}t_1} = \frac{v_0}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{m\ln 2}{A}$

Svar: **a**. $\bar{v}(t) = v_0 e^{-\frac{A}{m}t}\hat{x}$; **b**. $t_1 = \frac{m\ln 2}{A}$

---

6. $\bar{F} = -mg\hat{z} - k\bar{v} = (-mg - kv_z)\hat{z}$; $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dfrac{\bar{F}}{m} = (-g - \dfrac{k}{m}v_z)\hat{z}$

I $\hat{z}$ -led: $\dfrac{dv_z}{dt} = -g - \dfrac{k}{m}v_z \Rightarrow \dfrac{dv_z}{dt} + \dfrac{k}{m}v_z = -g \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(v_z e^{\frac{k}{m}t}) = -ge^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow$

$v_z e^{\frac{k}{m}t} = -g\dfrac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C \Rightarrow v_z = -g\dfrac{m}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$; $v_z(t=0) = 0 \Rightarrow v_z = -g\dfrac{m}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

Svar: $\bar{v}(t) = -g\dfrac{m}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})\hat{z}$

Lösningar

1. **a.** Kraftekvationen $\bar{F} = m\bar{a} = 5t\hat{x} + (3t-1)\hat{y}$

$$\bar{v} = \frac{1}{m}\left(\left(\frac{5t^2}{2} + C_x\right)\hat{x} + \left(\frac{3t^2}{2} - t + C_y\right)\hat{y}\right); \ \bar{v}(t=0) = 0 \Rightarrow C_x = C_y = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{v} = \frac{1}{m}\left(\frac{5t^2}{2}\hat{x} + \left(\frac{3t^2}{2} - t\right)\hat{y}\right) \Rightarrow \bar{v}(t=10) = \frac{1}{10}\left(\frac{500}{2}\hat{x} + \left(\frac{300}{2} - 10\right)\hat{y}\right) = 25\hat{x} + 14\hat{y} \text{ m/s}$$

$$|\bar{v}(t=10)| = \sqrt{25^2 + 14^2} = 28.7 \text{ m/s}$$

b. $E_k = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{82100}{20} = 4105 \text{ J}$

c. $W = \int \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{10} \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \dfrac{1}{m}\int_0^{10} (5t\hat{x} + (3t-1)\hat{y}) \cdot (\dfrac{5t^2}{2}\hat{x} + (\dfrac{3t^2}{2} - t)\hat{y})dt$

$$W = \frac{1}{m}\int_0^{10} (\frac{25t^3}{2} + (3t-1)(\frac{3t^2}{2} - t))dt = \frac{1}{m}\int_0^{10} (\frac{25t^3}{2} - \frac{3t^2}{2} + t + \frac{9t^3}{2} - 3t^2)dt =$$

$$\frac{1}{m}\int_0^{10} (17t^3 - \frac{9t^2}{2} + t)dt = \frac{1}{m}\left[17\frac{t^4}{4} - \frac{9t^3}{6} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{10} = \frac{100}{10}(17 \cdot 25 - 15 + 0.5) = 4105 \text{ J}$$

Svar: **a.** $\bar{v} = 25\hat{x} + 14\hat{y}$ m/s ; **b** $E_k = 4105$ J
c. $W = 4105$ J

---

2. Effekt $P = \bar{F} \cdot \bar{v} = m\bar{a} \cdot \bar{v} = m\bar{a}^2 t \Rightarrow P$ är max efter 5 s, därefter $P = 0$

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1 \cdot t_1 = \frac{3}{2}at_1^2 \Rightarrow \frac{2s}{3t_1^2} = a = \frac{200}{75} = \frac{8}{3} \text{ m/s}^2$$

$$P_{\max} = m\bar{a}^2 t_1 = 70 \cdot (\frac{8}{3})^2 5 \approx 2489 \text{ J/s} \approx 3.38 \text{ hk}$$

Svar: $P_{\max} = 3.38$ hk.

---

3. $\bar{F} = m\bar{a} = F\hat{x}$ är konstant $\Rightarrow \bar{a} = \dfrac{F}{m}\hat{x}$ är konstant

$\hat{x}$-led: $\dot{v}_x = \dfrac{F}{m} \Rightarrow v_x = \dfrac{F}{m}t + v_0$; $v_x(t = t_1) = \dfrac{F}{m} \cdot t_1 + v_0 = v_1 \Rightarrow$

$$F = \frac{m(v_1 - v_0)}{t_1} = \frac{1500 \cdot 36}{8 \cdot 3.6} = 1875 \text{ N}$$

$$W = \int \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int \bar{F} \cdot \bar{v} dt = \int_0^8 F v_x dt = \int_0^8 F(\frac{F}{m}t + v_0)dt = F\left[\frac{Ft^2}{2m} + v_0 t\right]_0^8 =$$

$$W = 1875\left[\frac{1875 \cdot 64}{2 \cdot 1500} + \frac{4 \cdot 8}{3.6}\right] = 1875(40 + 8.9) = 91.7 \text{ kJ}$$

Svar: **a.** $F = 1875$ N
b. $W = 91.7$ kJ

4. $E_{tot}^{i}=E_k^i+E_p^i=\frac{mv_0^2}{2}+0=\frac{mv_0^2}{2}=\frac{0.5\cdot 400}{2}=100\text{ J}$ **.**

$E_{tot}^{f}=E_k^f+E_p^f+E_{förlust}=0+mgh+E_{förlust}=mgh+E_{förlust}=$

$0.5\cdot 9.82\cdot 15+E_{förlust}=73.6+E_{förlust}$

$E_{tot}^{i}=E_{tot}^{f}\Rightarrow 73.6+E_{förlust}=100\Rightarrow E_{förlust}=26.4\text{ J}$

Svar: $E_{förlust}=26.4\text{ J}$

---

5. $E_{tot}^{A}=E_k^A+E_p^A=0+mgh=mgh$ **.**

$E_{tot}^{C}=E_k^C+E_p^C=\frac{mv_C^2}{2}+mg2a$

$E_{tot}^{A}=E_{tot}^{C}\Rightarrow mgh=\frac{mv_C^2}{2}+mg2a\Rightarrow v_C=\sqrt{2g(h-2a)}$

Svar: Hastigheten i punkten C $v_C=\sqrt{2g(h-2a)}$

---

6. $E_{tot}^{start}=\frac{mv^2}{2}$; $E_{tot}^{topp}=\frac{mv_{topp}^2}{2}+mg2r$

$E_{tot}^{topp}=E_{tot}^{start}\Rightarrow\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_{topp}^2}{2}+mg2r\Rightarrow v=\sqrt{v_{topp}^2+4rg}$

$\overline{v}_b$ är bollens hastighet i luften efter röret. $\overline{v}_b(t=0)=v_{topp}\hat{x}$ (horisontell led)

$\hat{y}$-(vertikal) led: fritt fall$\Rightarrow 2r=\frac{gt_{fall}^2}{2}\Rightarrow t_{fall}=2\sqrt{\frac{r}{g}}$

$\hat{x}$-led: $v_{bx}=v_{topp}$ konstant $\Rightarrow x_b(t)=v_{topp}t\Rightarrow 2r=v_{topp}t_{fall}\Rightarrow$

$v_{topp}=\sqrt{rg}$

$v=\sqrt{v_{topp}^2+4rg}=\sqrt{rg+4rg}=\sqrt{5rg}$

Svar: Farten ska vara $v=\sqrt{5rg}$
