Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2013-01-08
Tid:	14.00 – 19.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. Bestäm alla lösningar till ekvationerna
   a) $2|x+2| = 3x + |x-3|$.
   b) $2\sin^2(3x) + \sin(3x) - 1 = 0$.

2. I en ON-bas har linjen L_1 ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ och linjen L_2 ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.

   a) Bestäm vinkeln mellan de båda linjerna.
   b) Bestäm avståndet mellan punkten $P = (3,1,1)$ och linjen L_1.

3. a) Beräkna $\left(\frac{2i}{1-i}\right)^{18}$ och ange svaret på formen $x + iy$, där både x och $y \in \mathbb{R}$.
   b) Markera i ett komplext talplan alla komplexa tal z sådana att $|z - i| \leq 1$ och $0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.
   c) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är $|e^{ix}| = 1$? För vilka $x \in \mathbb{R}$ är $e^{ix} = 1$?

4. Funktionen f ges av $f(x) = \sqrt{3x-2}$ och sin naturliga definitionsmängd.
   a) Bestäm inversen, f^{-1}, till f inklusive inversens definitionsmängd.
   b) Har kurvorna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ några gemensamma punkter? Bestäm i så fall koordinaterna för dessa skärningspunkter.

5. a) Faktorisera polynomet $x^3 - 3x - 2$ i förstagradsfaktorer på formen $(x-a)$. *Redovisa* en relevant kontroll av resultatet.
   b) Vilka reella tal x uppfyller olikheten $x^2 - 3 \leq \dfrac{2}{x}$?
   c) För vilka reella x gäller det att $\ln(x-1)^2 + \ln(x+2) \leq 2\ln 2$?

6. Använd t.ex. induktion för att visa att
$$\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 3k) = \frac{n(n+1)(n-4)}{3}$$
   för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

7. Bestäm ekvationen för spegelbilden av linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ i planet $x - y + z + 4 = 0$.

   (ON-bas).