Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2014-10-31
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. Vilka reella tal x uppfyller

   a) $|x-4| + 2x = |x|$

   b) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 2x$

2. a) Låt z_1 och z_2 vara de komplexa talen $z_1 = 1 - i$ respektive $z_2 = 4e^{i\pi/3}$. Beräkna $(z_1 \cdot z_2)^{24}$. Ange svaret på formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$.

   b) Bestäm alla komplexa tal z som har $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$ och som uppfyller $|z-1| = 1$. Svara på formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$. Lösning som bygger på geometrisk tolkning accepteras.

   c) Låt w vara ett komplext tal med $w = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, där $\alpha \in \mathbb{R}$. Visa att
   $$|w| = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|.$$

3. I en ON-bas är punkten $P = (1,1,1)$ och planet Π har ekvationen $x - y + z = 0$.
   a) Bestäm koordinaterna för den ortogonala projektionen av P på planet Π.
   b) Beräkna avståndet mellan P och planet Π.
   Observera att till uppgift 3 skall du rita och använda en relevant figur för att lösningen skall vara fullständig.

4. a) Bestäm $\sin\alpha$ och $\cos 2\alpha$ om $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ och $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
   b) Illustrera i en enhetscirkel sambandet $\sin(v + \pi) = -\sin v$. Kommentera figuren på lämpligt sätt.

   c) Bestäm alla lösningar till ekvationen
   $$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0.$$

5. Låt $f(x) = \sqrt{\ln(3-x) - \ln(x+1)}$.
   a) Bestäm f:s definitionsmängd D_f.

   b) Har f någon invers? Bestäm i så fall inversen inklusive dess definitionsmängd.

6. I en ON-bas har linjen L ekvationen $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$, där $t \in \mathbb{R}$.

   Bestäm spegelbilden, S, av punkten $P = (2,1,-1)$ i linjen L. För full poäng på uppgiften krävs i detta fall att du redovisar en relevant kontroll av resultatet. Observera också att lösning utan figur inte är fullständig.

7. Finns det finns något reellt tal t sådant att sambandet
   $$\sum_{k=1}^{n} (1 + tk)^2 = 12n^3 + 12n^2 + n$$
   gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$? Visa i så fall påståendet för detta värde på t.