TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2017-10-19 - Lösningsskiss

1. a)

$$\frac{4x}{x+1} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{x+1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 3(x+1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow //\text{Teckenschema}// \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup [3, \infty[$$

Svar: $x \in]-\infty, -1[\cup [3, \infty[$.

b)

$I_1: x \leq 2$	$I_2: 2 \leq x \leq 3$	$I_3: x \geq 3$
$-x + 2 - x + 3 = 4$ $\Leftrightarrow 2x = 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in I_1$	$x - 2 - x + 3 = 4$ $\Leftrightarrow 1 = 4$ Lösning saknas	$x - 2 + x - 3 = 4$ $\Leftrightarrow 2x = 9$ $\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \in I_3$

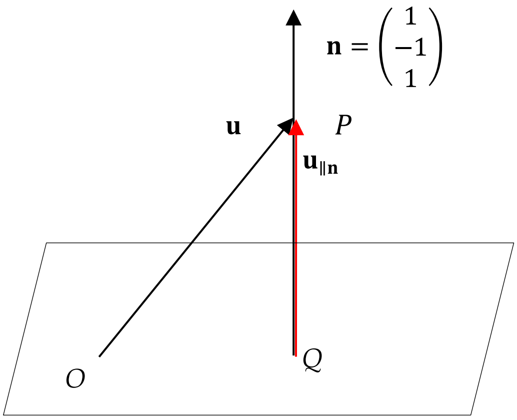
Svar: $x = \frac{1}{2}, x = \frac{9}{2}$

2.a) Linjens ekvation insatt i planets ger

$$(1+s) - (1+2s) + (4-s) = 0 \Leftrightarrow s = 2$$

vilket ger skärningspunkten $(1+2, 1+2\cdot 2, 4-2) = (3, 5, 2)$.

b) Origo, O, ligger i planet. Vi ritar en figur.



Det kortaste avståndet mellan punkten P och planet ges av $|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}}|$.

Vi bildar vektorn $\mathbf{u} = \overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Projektionsformeln ger

$$\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som ger avståndet $|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}}| = 2\sqrt{3}$.

Svar: Det kortaste avståndet mellan punkten och planet är $2\sqrt{3}$ l.e.

3.a) Vi får

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow [t = \sin x]$$
$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, t = 2$$

vilket ger

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$$

samt

$$\sin x = 2$$

som saknar lösning ty $V_{\sin} = [-1,1]$.

Svar: $x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

b) Trigonometriska ettan ger

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1 \Leftrightarrow \cos v = \pm\sqrt{1 - \sin^2 v}$$

och då $\frac{\pi}{2} < v < \pi$ fås

$$\cos v = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

vilket ger

$$\sin 2v = 2\sin v\cos v = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

samt

$$\tan 2v = \frac{\sin 2v}{\cos 2v} = \frac{\sin 2v}{\cos^2 v - \sin^2 v} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

Svar: $\sin 2v = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\tan 2v = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

4.a) $z = -1 + \sqrt{3}i$ ger $\arg z = \frac{2\pi}{3}(+\, n\cdot 2\pi)$ samt $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

Svar: $\arg z = \frac{2\pi}{3}(+\, n\cdot 2\pi)$, $|z| = 2$.

b) Vi får $z = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ vilket ger

$$z^{11} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{11} = 2^{11}e^{i\frac{22\pi}{3}} = 2^{11}e^{i\left(\frac{18\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{11}e^{i\frac{4\pi}{3}}$$
$$= 2^{11}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{11}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{10} - 2^{10}i\sqrt{3}.$$

Svar: $z^{11} = -2^{10} - 2^{10}i\sqrt{3}$.

c) Vi får med $z = x + iy$

$$|z + 4| = 2|z + 1| \Leftrightarrow |x + iy + 4| = 2|x + iy + 1|$$

$$\Leftrightarrow |(x + 4) + iy| = 2|(x + 1) + iy| \Leftrightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 + y^2 = 4((x + 1)^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 = 2^2$$

vilket ger alla punkter på en cirkel med medelpunkt i origo och radie 2.

Svar: Alla punkter på en cirkel med medelpunkt i origo och radie 2.

5.a) Vi får

$$e^{3x} + e^{2x} - 10e^x + 8 = 0 \Leftrightarrow [t = e^x, t > 0] \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 10t + 8 = 0$$

och prövning ger att $t = 1$ är en rot till ekvationen. Faktorsatsen ger då att $t - 1$ är en faktor till polynomet i vänsterledet. Polynomdivision och faktorisering ger då

$$t^3 + t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t - 8) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (t-1)(t-2)(t+4) = 0.$$

$$\Leftrightarrow t = 1, t = 2, t = -4.$$

Med $t = e^x, t > 0$ fås då

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0, e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

samt $e^x = -4$ som saknar lösning ty $e^x > 0$.

Svar: $x = 0, x = \ln 2$.

b) Eftersom funktionen $f(x) = e^{3x} - 1$, där $D_f = \mathbb{R}$, är strängt växande och därmed har invers fås

$$y = e^{3x} - 1 \Leftrightarrow e^{3x} = y + 1 \Leftrightarrow 3x = \ln(y+1) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y+1)}{3}$$

dvs $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)}{3}$.

Då $D_f = \mathbb{R}$ ger detta att $V_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R}$. Och vi ser också ur $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)}{3}$ att $D_{f^{-1}(x)} =]-1, \infty[$ ty $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)}{3}, D_{f^{-1}(x)} =]-1, \infty[, V_{f^{-1}(x)} = \mathbb{R}$.

6.a) Definitionsmängden för ln ger

$$(1)\ x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow [\text{Teckenschema}] \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$$

$$(2)\ x > 0$$

vilket ger $D_{\text{olikhet}} = (]-\infty, -2[\cup]2, \infty[) \cap]0, \infty[=]2, \infty[$.

Vi får då

$$\ln(x^2 - 4) \leq \ln 3 + \ln x, x \in]2, \infty[\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4) \leq \ln 3x, x \in]2, \infty[$$

$$\Leftrightarrow [\text{lnfunktionen strängt växande}] \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 3x, x \in]2, \infty[\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0, x \in]2, \infty[$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-4) \leq 0, x \in]2, \infty[\Leftrightarrow [\text{Teckenschema}] \Leftrightarrow x \in [-1, 4] \cap]2, \infty[=]2, 4].$$

Svar: Olikheten har lösningsmängden $x \in]2, 4]$.

b) Vi tar en punkt i respektive plan och bildar en vektor från det ena planet till det andra. Vi får

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi projicerar denna vektor på normalvektorn $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och får

$$\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}} = \frac{\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Det kortaste avståndet ges då av $|\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Svar: Det kortaste avståndet mellan planen är $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ l.e.

7. Vi undersöker påståendet med induktion.

Steg 1. För $n = 1$ fås

$$VL(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{t^2}{k+k^2} = \frac{t^2}{2} \text{ och } HL(1) = \frac{t}{1+t}$$

ger $VL(1) = HL(1)$ om

$$\frac{t^2}{2} = \frac{t}{1+t} \Leftrightarrow t^2(1+t) - 2t = 0 \Leftrightarrow t^2(1+t) - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t = -2, t = 0, t = 1.$$

Nu undersöker vilka av dessa som stämmer.

$t = -2$ ger

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+k^2} = \frac{-2n}{n-2}$$

Där vi direkt ser att detta påstående ej stämmer för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ ty högerledet är ej definierat för $n = 2$ och för $n > 2$ är dessutom högerledet negativt, vilket är omöjligt då vänstra ledet endast innehåller en summa av positiva termer.

$t = 0$ ger

$$\sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

som är sant.

$t = 1$ ger

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} = \frac{n}{n+1}$$

Steg 1. För $n = 1$ fås (redan visat)

$$VL(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k+k^2} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \text{ och } HL(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

dvs $VL(1) = HL(1)$.

Steg 2. Antag att påståendet är sant för något $p \in \mathbb{Z}^+$, dvs $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k+k^2} = \frac{p}{p+1}$.

Detta medför

$$VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k+k^2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k+k^2} + \frac{1}{(p+1)+(p+1)^2}$$

$$\underbrace{=}_{\text{enl. antagandet}} \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)+(p+1)^2} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1+p^2+2p+1}$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

och vi har

$$HL(p+1) = \frac{p+1}{(p+1)+1} = \frac{p+1}{p+2}$$

dvs $VL(p+1) = HL(p+1)$.

Därmed har vi visat att om sambandet gäller för $n = p$ så gäller det för $n = p + 1$.

Steg 3. Sambandet gäller enligt Steg 1 för $n = 1$. Enligt Steg 2 gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ och $n = 3 + 1 = 4$ o.s.v. Alltså gäller sambandet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, VSV.

Svar: Se ovan.