TENTAMEN

Datum:	24 augusti 2017
Tid:	8-12
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Marcus Posada, 011-363564
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

Ett företag tillverkar vegetabilisk olja som används i olika typer av livsmedelsframställning. Tillverkningen sker i någon av företagets två fabriker (F), och den färdiga oljan transporteras sedan till någon av de tre (inte två) depåerna (D), för att sedan distribueras till någon av de tre kunderna (K). Transportkostnaderna (per 1000 liter) mellan fabrikerna och depåerna ges i Tabell 1, samt mellan depåerna och kunderna i Tabell 2. Tillgången på olja från respektive fabrik och efterfrågan hos respektive kund för den kommande månaden ges i Tabell 3. Varje depå kan maximalt hantera 3 000 000 liter olja per månad.

Tabell 1 Transportkostnad i SEK per 1000 liter olja, mellan depå (D) och fabrik (F)

	F1	F2
D1	1,50	1,20
D2	1,20	2,00
D3	1,30	1,90

Tabell 2 Transportkostnad i SEK per 1000 liter olja, mellan depå (D) och kund (K)

	K1	K2	K3
D1	2,10	3,20	4,90
D2	2,30	2,00	3,30
D3	2,00	2,10	3,10

Tabell 3 Tillgång, efterfrågan och kapacitet, i 1000 liter olja

Fabrik	F1	F2	
Tillgång	2 400	4 000	
Kund	K1	K2	K3
Efterfrågan	700	1 900	3 300

Formulera förtagets kostnadsminimeringsproblem som en LP-modell med variabeldefinition, målfunktion och bivillkor.

Variabeldefinition:
y_{ij} =volym i 1000 liter olja som produceras i fabrik *i* och skickas till depå *j*, *i=1,2*, *j=1,2,3*
x_{jk} =volym i 1000 liter olja som skickas från depå *j* till kund *k*, *j=1,2,3*, *k=1,2,3*

$$\min z = 1.5y_{11} + 1.2y_{21} + 1.2y_{12} + 2y_{22} + 1.3y_{13} + 1.9y_{23} + 2.1x_{11} + 3.2x_{12} + 4.9x_{13} + 2.3x_{21} + 2x_{22} + 3.3x_{23} + 2x_{31} + 2.1x_{32} + 3.1x_{33}$$

$$då \quad \sum_{j=1}^{3} y_{1j} \leq 2400 \quad (kap. F1)$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{2j} \leq 4000 \quad (kap\ F2)$$

$$\sum_{i=1}^{2} y_{ij} \leq 3000, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (kap.depåer)$$

$$\sum_{i=1}^{2} y_{1j} = \sum_{k=1}^{3} x_{jk}, \qquad j = 1, \dots, 3 \quad (in\ depå = ut\ depå)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{j1} = 700 \quad (efterfrågan\ K1)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{j2} = 1900 \quad (efterfrågan\ K2)$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{j3} = 3300 \quad (efterfrågan\ K3)$$

$$x_{ij} \geq 0\ \forall i, j$$
$$y_{jk} \geq 0\ \forall j, k$$

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar fyra olika produkter (1, 2, 3, 4) på vid olika maskiner (A och B). Tiden det tar att tillverka en enhet av respektive produkt på respektive maskin, samt vinsten av varje såld produkt ges nedan.

		Maskintid (i min)		Vinst (i kr)
		A	B	
Produkt	1	10	27	10
	2	12	19	12
	3	13	33	17
	4	8	23	8

Produkt 1 måste gå igenom både maskin A *och* B, medan övriga produkter kan tillverkas i maskin A *eller* B. Fabriken där tillverkningen sker är liten och har en begränsad yta. En veckas produktion lagras på 50 kvadratmeter och ytan som tas upp av varje produkt är 0.1, 0.15, 0.5 och 0.05 (kvadratmeter) för varje enhet av respektive produkt 1, 2, 3 and 4. Krav från kunder gör att exakt dubbelt så många enheter av produkt 2 måste tillverkas jämfört med produkt 3. Över en vecka finns 1800 minuter (30h) maskintid tillgänglig i maskin A och 2100 minuter (35h) i maskin B.

Företagets problem att för varje vecka maximera vinsten kan formuleras som:

x_i : antal enheter per vecka av produkt i som produceras i maskin $A, i = 1,2,3,4$

y_i : antal enheter per vecka av produkt i som produceras i maskin $B, i = 2,3,4$

$$\max z = 10x_1 + 12(x_2 + y_2) + 17(x_3 + y_3) + 8(x_4 + y_4)$$

då
$$
\begin{aligned}
0.1x_1 + 0.15(x_2 + y_2) + 0.5(x_3 + y_3) + 0.05(x_4 + y_4) &\leq 50 && \text{(lagringsyta)}\\
x_2 + y_2 - 2(x_3 + y_3) &= 0 && \text{(kundkrav)}\\
10x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 8x_4 &\leq 1800 && \text{(tillgång till tid i maskin A)}\\
27x_1 + 19y_2 + 33y_3 + 23y_4 &\leq 2100 && \text{(tillgång till tid i maskin B)}\\
x_1, x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Modellen har lösts, med AMPL/CPLEX och utdata finns på nästa sida.

Utgå från känslighetsanalysen på nästa sida och besvara följande frågor:

a) Genom att låta de anställda jobba övertid kan företaget få mer tillgänglig tid i maskin A eller B. Företaget måste välja en av maskinerna som ska gå på övertid. Kostnaden är 1000 kr, och för detta pris erhålls 100 extra produktionstimmar (tanken var minuter, oavsett hur man tolkat uppgiften kan man erhålla poäng). Vilken, om någon, maskin bör man välja? (2p)

   Dualvärdet ger att varje extra timma i maskin A ökar målfunktionsvärdet med 0.87kr och i maskin B med 0.34kr. Dualvariabeln är för båda maskinerna giltig för 100 extra timmar. Kostnaden per extra timma blir 10kr per timma, vilket överstiger vinsten för någon av maskinerna. Företaget bör inte ta in övertid.

b) Hur mycket måste vinsten för produkt 1 öka för att det ska bli intressant att tillverka denna produkt? (1p)

   Ges av reducerad kostnad för x1 variabeln. Dvs. vinsten måste öka med 10.0324 kr.

c) Ange minsta möjliga intervall för förändringen av målfunktionsvärdet om man får tillgång till 10 kvadratmeter extra lagringsutrymme. (2p)

   Dualvärdet ger att vinsten per ytterligare kvadratmeter yta ökar målfunktionsvärdet med 20.8422kr. Men dualvärdet är endast giltigt för förändringar med 0.9704 ytterligare kvadratmeter. Därefter är dualvärdet oförändrat eller lägre (lägst 0). Minsta ökning av målfunktionsvärdet: 20.8422*0.9704=20.225 kr, största möjliga förändring av målfunktionsvärdet 20.8422*10= 208.422 kr.

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 3327.14329
5 dual simplex iterations (2 in phase I)

z = 3327.14

: _varname   _var      _var.rc     :=
1   x1        0        -10.0324
2   x2        0        -3.92699
3   x3      51.9237       0
4   x4      140.624       0
5   y2      107.422       0
6   y3       1.78734      0
7   y4        0        -0.922448
;

: _varname   _var.down  _var.current  _var.up   :=
1   x1       -1e+20        10         20.0324
2   x2       -1e+20        12         15.927
3   x3        10.9437      17         18.2816
4   x4        7.21134      8         11.727
5   y2        7.68332      12         55.5
6   y3        15.6993      17         24.4974
7   y4       -1e+20         8         8.92245
;

:   _conname      _con.slack    _con.dual   :=
1   lagringsyta    0            20.8422
2   kundkrav      -3.9968e-15   2.36383
3   tid_maskin_A   0            0.869736
4   tid_maskin_B   0            0.342623
;

:   _conname      _con.down _con.current   _con.up     :=
1   lagringsyta    34.912        50        50.9704
2   kundkrav      -160.38         0        4.63472
3   tid_maskin_A   1644.74     1800        4214.08
4   tid_maskin_B   2048.7      2100        3439.06
```

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{då} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 12 \\
& 2x_1 + 2x_3 \geq 5 \\
& 4x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

med optimalt målfunktionsvärde z^*.

a) Antag att högerledet i bivillkor 2 ökar och att det nya problemet ger ett optimalt målfunktionsvärde z^*_{NY}. Ange relationen (=,≤,≥) mellan z^* och z^*_{NY}. *Motivera!* (1p)

Restriktion+maximering: $z^*_{NY} \leq z^*$

b) Antag att x_2 får ett heltalskrav och att det nya problemet ger ett optimalt målfunktionsvärde z^*_{NY}. Ange relationen (=,≤,≥) mellan z^* och z^*_{NY}. *Motivera!* (1p)

Restriktion+maximering: $z^*_{NY} \leq z^*$

c) Visa att lösningen x = $(1,1,2)^T$ inte kan vara en optimallösning för en godtyckligt vald målfunktion som innehåller nollskilda värden på målfunktionskoefficienterna för x_1, x_2 och x_3. (1p)

Insättning av $(1,1,2)^T$ i bivillkoren ger
1-1+6<=12
2+4>=5
4+1<=8

Eftersom inget bivillkor uppfylls med likhet utgör lösningen en inrepunkt, och ligger varken lösningen i en hörnpunkt eller utmed en kant på det tillåtna området. En målfunktion som innehåller nollskilda värden på målfunktionskoefficienterna för x_1, x_2 och x_3 har alltid en optimallösning i en extrempunkt, och vid multipla optimum utmed kanten till det tillåtna området. Därför kan inte lösningen vara en optimallösning.

d) Formulera dualen till problemet. (1p)

$$
\begin{gathered}
\min h = 12y_1 + 5y_2 + 8y_3 \\
då\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 5 \\
-y_1 + y_3 \geq 2 \\
3y_1 + 2y_2 \geq 4 \\
y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0
\end{gathered}
$$

e) Formulera om problemet på standardform. (1p)

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{då} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 + s_1 = 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad + \quad 2x_3 - s_2 &= 5 \\
4x_1 + \; x_2 \qquad + s_3 &= 8 \\
x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(5p) Uppgift 4

Betrakta nedanstående minimeringsproblem, och den optimala simplextablån för problemet.

$$
\begin{aligned}
\min z = -2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\
\text{då} \qquad\qquad x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\
4x_1 \qquad - 2x_3 &\geq 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 9 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

basvar/var	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	0	-1	-4	0	0	-2	-18
s_1	0	0	1	2	1	0	0	10
x_1	0	1	1	1	0	0	1	9
s_2	0	0	4	6	0	1	4	33

a) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för x_2 är lösningen ovan den optimala? (1p)

Undersök bibehållen optimalitet med målfunktionskoefficient $c_2^{ny} = c_2 + \Delta c_2 = -1 + \Delta c_2$, insättning i tablå ger villkoret $-1 - \Delta c_2 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \geq -1$. Dvs. Δc_2 får minska med max 1, och öka obegränsat.

b) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för x_1 är lösningen ovan den optimala? (2p)

Undersök bibehållen optimalitet med målfunktionskoefficient $c_1^{ny} = c_1 + \Delta c_1 = -2 + \Delta c_1$, insättning i tablå ger villkoren:
$-1 + \Delta c_1 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq 1$
$-4 + \Delta c_1 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq 4$
$-2 + \Delta c_1 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq 2$
Dvs. Δc_1 får öka med max 1, och minska obegränsat.

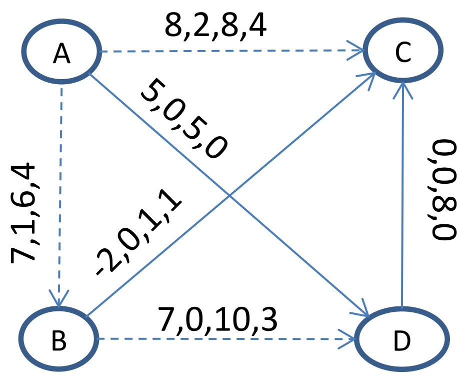
c) Antag istället att det är ett maximeringsproblem som löses. Utgå från tablån ovan som inte längre beskriver en optimallösning. Vilken variabel blir inkommande variabel i nästa simplexiteration och vilken blir utgående? (2p)

Inkommande bestäms av störst positiv reducerad kostnad, dvs. x_3

Utgående är s_1, ty $5 < 5.5 < 9$

(5p) Uppgift 5

Betrakta nätverket nedan. Varje båge har kostnad, undregräns, övregräns och aktuellt flöde (i den ordningen) markerat.



a) Ange nodstyrkorna i nätverket. (1p)

Nod A: Källa med styrka 8
Nod B: Mellannod med styrka 0
Nod C: Sänka med styrka 5
Nod D: Sänka med styrka 3

b) Ta fram ett basträd tillhörande nodpriser. (1p)

Basträd markerat med streckade bågar

Nodpriser:
Nod A: 0
Nod B: 7
Nod C: 8
Nod D: 14

c) Lösningen är inte optimal. Genomför en iteration med simplexmetoden för minkostnadsflödesproblem. Dvs. bestäm inkommande och utgående basbåge samt avgör om den nya lösningen är optimal. (3p)

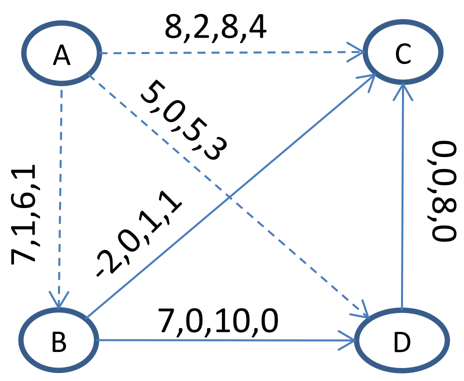
Beräkna reducerad kostnad för icke-basbågar

$$\bar{c}_{AD} = 5 + 0 - 14 = -9, x_{AD} = l_{AD}, ej\ ok$$
$$\bar{c}_{BC} = -2 + 7 - 8 = -3, x_{BC} = u_{BC}, ok$$
$$\bar{c}_{DC} = 0 + 14 - 8 = 6, x_{DC} = l_{DC}, ok$$

(A,D) inkommande basbåge. Bildar cykel A-D-B-A. Flöde ska ökas på framåtbågar i cykeln och minskas på bakåtbågar. Maximala flödesförändringar
(A,D) öka max 5
(B,D) minska max 3

(A,B) minska max 3
(B,D) eller (A,B) blir utgående basbåge. Beroende på vilken som väljs ser resterande lösning olika ut. Här visas endast för fallet då (B,D) väljs.

Nya flöden



Nya nodpriser
Nod A: 0
Nod B: 7
Nod C: 8
Nod D: 5

Beräkna reducerad kostnad för icke-basbågar

$$\bar{c}_{BD} = 7 + 7 - 5 = 9, x_{BD} = l_{BD}, ok$$
$$\bar{c}_{BC} = -2 + 7 - 8 = -3, x_{BC} = u_{BC}, ok$$
$$\bar{c}_{DC} = 0 + 5 - 8 = -3, x_{DC} = l_{DC}, ej\ ok$$

Lösningen är ej optimal