

TSKS21 Signaler, information & bilder

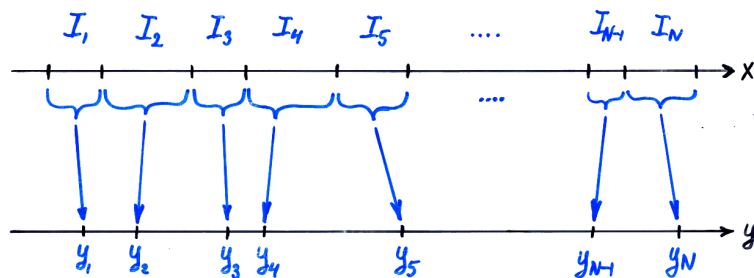
Föreläsning 9

Kvantisering och brus

Amplitudmodulering

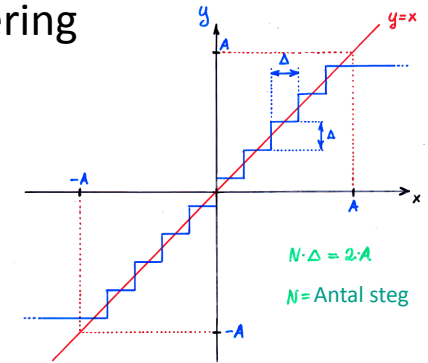
Mikael Olofsson
 Institutionen för Systemteknik (ISY)
 Ämnesområdet Kommunikationssystem

Principen för Kvantisering

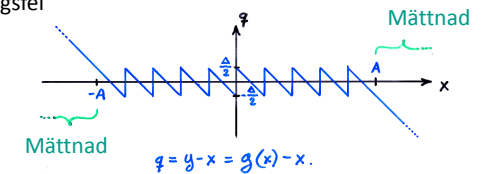


Likformig Kvantisering

$$y = g(x) = \begin{cases} A - \frac{\Delta}{2}, & x > A \\ \frac{\Delta}{2} + \left[\frac{x}{\Delta}\right] \cdot \Delta, & |x| \leq A \\ -A + \frac{\Delta}{2}, & x < -A \end{cases}$$



Kvantiseringsfel



Kvantiseringsdistorsion 1(2)



The error: $Q = Y - X = g(X) - X$

Quantization distortion:

$$P_Q = E\{Q^2\} = E\{[g(X) - X]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - x]^2 f_X(x) dx$$

Assumptions:

1. No saturation: $f_X(x) = 0$ for $|x| \geq A$
2. Nice distribution: $f_X(x)$ continuous for $|x| < A$
3. Small Δ : $f_X(x)$ approx. const. in intervals of length Δ .

Kvantiseringsdistorsion 2(2)

$$P_Q = \int_{-A}^A (g(x) - x)^2 f_X(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{y_k - \frac{\Delta}{2}}^{y_k + \frac{\Delta}{2}} (y_k - x)^2 f_X(x) dx = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u^2 f_X(y_k + u) du$$

$$\approx \sum_{k=1}^N \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u^2 f_X(y_k) du = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=1}^N \Delta f_X(y_k) \approx \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=1}^N \Pr\{X \in I_k\} = \frac{\Delta^2}{12}$$

*Δ small
u small*

Error distribution: Approx. uniformly distr. over $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$

Generally without saturation:

$$P_Q \leq \frac{\Delta^2}{4} \quad \text{since } |Q| \leq \frac{\Delta}{2}$$

SDR för likformig kvantisering med mättnad

Likformig fördelning över $[-B, B]$.

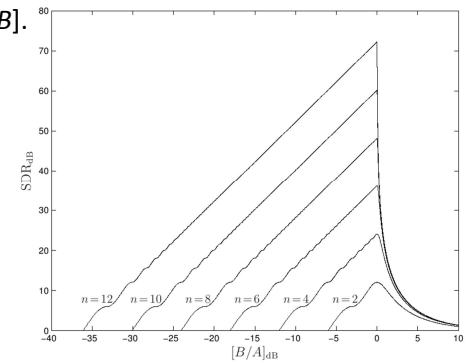
$$P_X = E\{X^2\} = \int_{-B}^B x^2 \frac{1}{2B} dx = \frac{B^2}{3}$$

Q och S okorrelerade:

$$P_{Q+S} = P_Q + P_S$$

$$SDR = \frac{P_X}{P_Q + P_S}$$

$$P_{Q+S} = \begin{cases} \frac{(2k+1)(\Delta/2)^3 + (B - (2k+1)\Delta/2)^3}{3B}, & k\Delta \leq B < (k+1)\Delta, \quad k \in \{0, 1, \dots, N/2 - 2\} \\ \frac{A - \Delta/2}{B} \cdot \frac{\Delta^2}{12} + \frac{(B - A + \Delta/2)^3}{3B}, & B \geq A - \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$



SDR för likformig kvantisering

SDR – Signal-till-Distorsions-Förhållande (Ratio)

Fortfarande begränsad till $[-A, A]$ och med tillräckligt snäll fördelning.

$$P_Q = E\{Q^2\} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 \frac{1}{\Delta} dq = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{A^2}{3N^2} \Rightarrow SDR = \frac{P_X}{P_Q} = \frac{3P_X}{A^2} N^2 = \frac{3P_X}{A^2} 2^{2n}$$

$$SDR_{dB} = 10 \log_{10}(SDR) = 10 \log_{10}\left(\frac{3P_X}{A^2}\right) + n \cdot 20 \log_{10}(2) \approx 10 \log_{10}\left(\frac{3P_X}{A^2}\right) + 6n$$

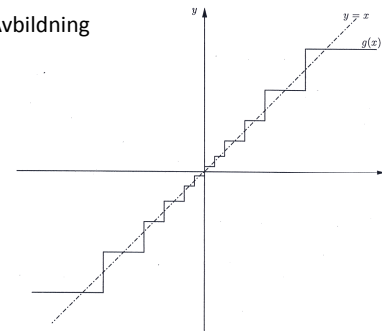
Exempel: Likformig fördelning över $[-A, A]$.

$$P_X = E\{X^2\} = \int_{-A}^A x^2 \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{3}$$

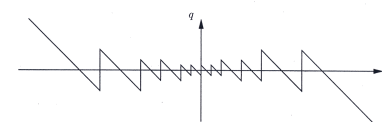
$$SDR_{dB} \approx 10 \log_{10}\left(\frac{3A^2/3}{A^2}\right) + 6n = 10 \log_{10}(1) + 6n = 6n$$

Olikformig kvantisering

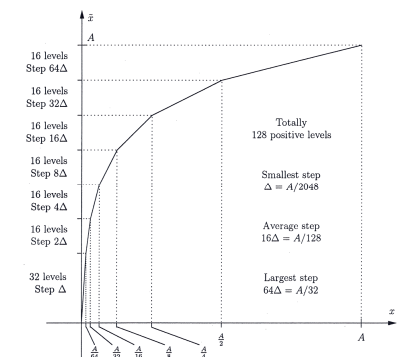
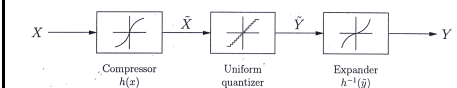
Avbildning



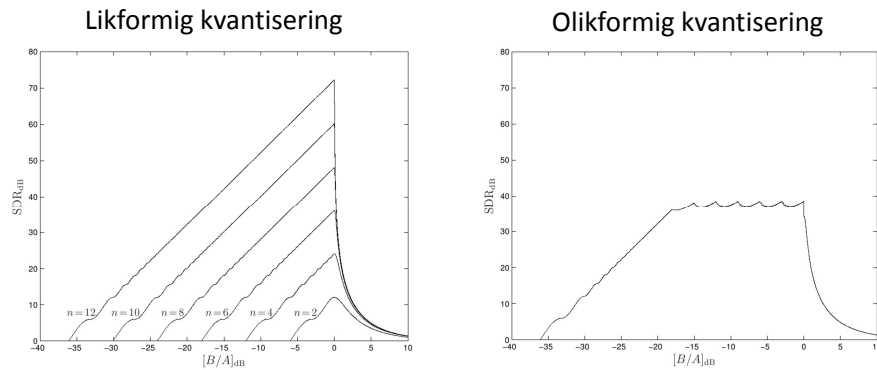
Kvantiseringsfel



Implementering

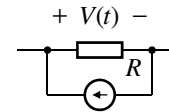


SDR för olikformig kvantisering



Termiskt brus 2(3) – Spektraltäthet

Fortsatt modell:



Vitt gaussiskt brus med

$$R_V(f) = \frac{N_0}{2} = 2kTR$$

$k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmanns konstant)

T = Absolut temperatur i Kelvin.

R = Resistans i Ohm.

$h \approx 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js (Plancks konstant)

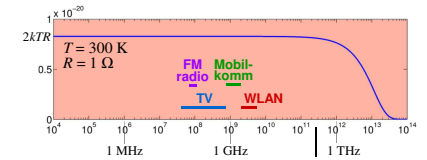
Mer exakt modell:

Gaussiskt brus med

$$R_V(f) = \frac{2Rhf|f|}{e^{hf/kT} - 1}$$

Notera:

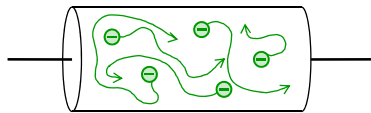
$$R_V(f) \rightarrow 2kTR \quad \text{när } f \rightarrow 0$$



Reglerat radiospektrum

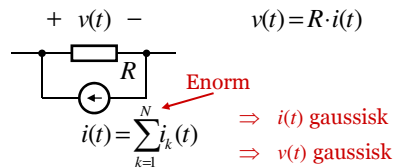
Termiskt brus 1(3) – Fysiken bakom

Ett motstånd:



- Termiska rörelser hos elektroner
- ⇒ Slumpmässiga lokala strömmar
- ⇒ Slumpmässiga lokala spänningar
- ⇒ Slumpmässig total spänning

Modell:



Korta pulser, nästan enhetsimpulser
⇒ $i(t_1)$ & $i(t_2)$ nästan oberoende
för $t_1 \neq t_2$

Vitt gaussiskt brus

Termiskt brus 3(3) – Hur stort är stort?

Kol

Densitet: 1.5 kg/dm^3

#nukleoner: 12

Atommassa: $12 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg/atom}$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{12 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27}} = 7.4 \cdot 10^{25} \text{ atomer/dm}^3$$

Motstånd



Tvärsnittsarea: 0.25 mm^2

Längd: 2 mm

$$\Rightarrow \text{Volym } 0.5 \text{ mm}^3 = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ dm}^3$$

$$\Rightarrow 0.5 \cdot 10^{-6} \cdot 7.4 \cdot 10^{25} \approx 3.8 \cdot 10^{19} \text{ kolatomer}$$

Kol har 4 valenselektroner/atom

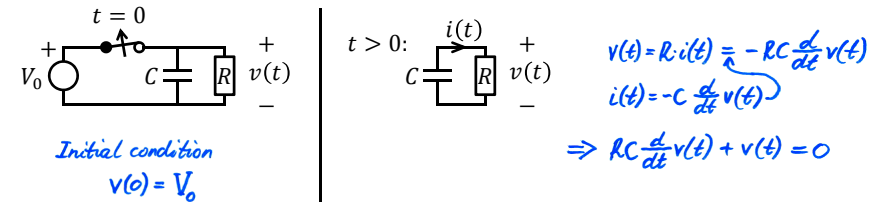
$$\Rightarrow \text{Totalt } 4 \cdot 3.8 \cdot 10^{19} \approx 1.5 \cdot 10^{20} \text{ valenselektroner.}$$

Klassificering av frekvensselektiva filter

- Ett (frekvensselektivt) filter är ett LTI-system. Vanligen släpper det igenom något frekvensband eller spärrar det.
- Vanligen ett elektriskt nät – antingen passivt eller aktivt.

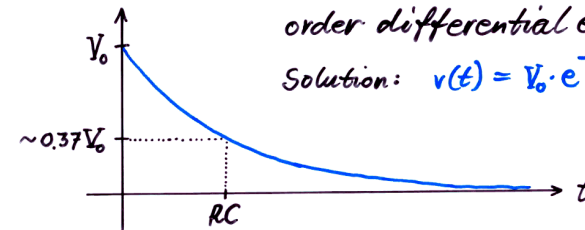
Notation	Ideal amplitudkaraktäristik	Verklig amplitudkaraktäristik
Lågpasfilter (LP-filter):		
Högpasfilter (HP-filter):		
Bandpassfilter (BP-filter):		
Bandspärrfilter (BS-filter):		
Allpassfilter (AP-filter):		

Urladdning av en kapacitans

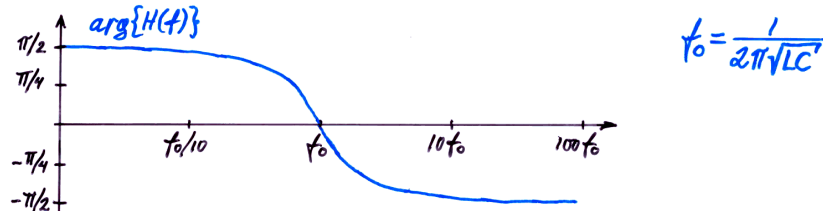
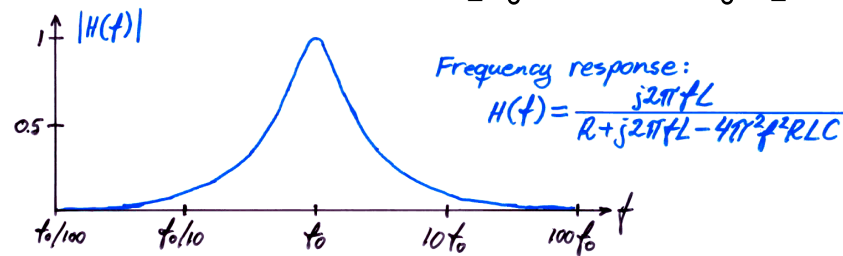
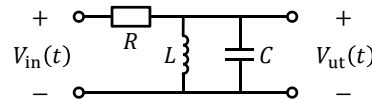


This is the standard example of a first order differential equation.

Solution: $v(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC}$ for $t \geq 0$



Ett BP-filter



Amplitudmodulering

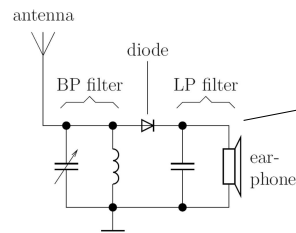
- Den första tekniken för rundradio.
- En linjär modulationsteknik.
- Enkel att analysera.
- Enkel demodulering.
- Bruskänslig.

Amplitudmodulering i tidsdomänen

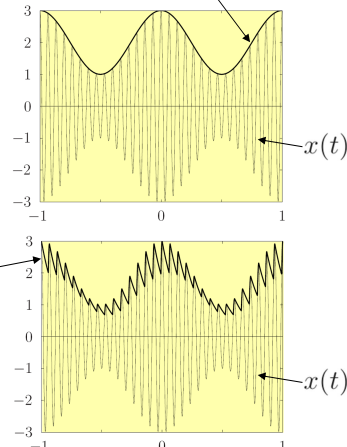
Standard AM:

$$x(t) = A \cdot (C + m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

Krystallmottagare, en enveloppdetektor, den första demoduleringen för standard AM:

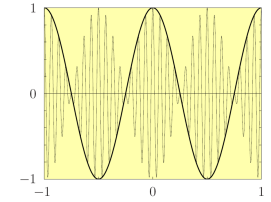


Envelopp, $A \cdot (C + m(t))$



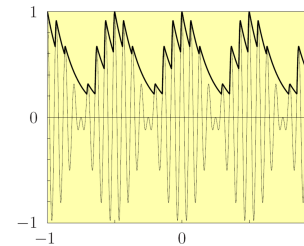
AM-SC – Undertryckt bärvåg

AM-SC: $x(t) = Am(t) \cos(\omega_c t)$

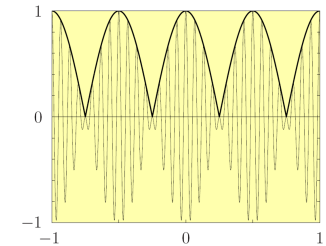


Demodulering av AM-SC med en enveloppdetektor:

Krystallmottagarens utsignal



Envelopp



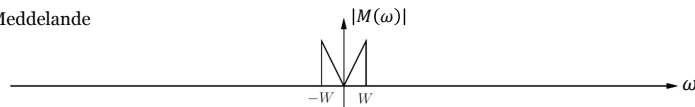
Spektrum för AM

$$x(t) = A \cdot (C + m(t)) \cos(\omega_c t)$$

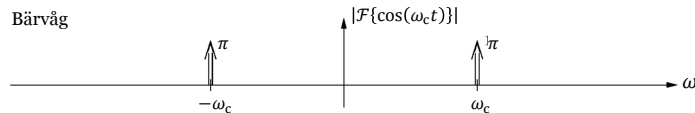
$$X(\omega) = \mathcal{F}\{AC \cos(\omega_c t)\} + \mathcal{F}\{Am(t) \cos(\omega_c t)\}$$

$$= AC\pi(\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)) + \frac{A}{2}(M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c))$$

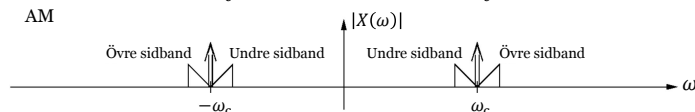
Meddelande



Bärvåg



AM



Spektrum för AM-SC – och Demodulering

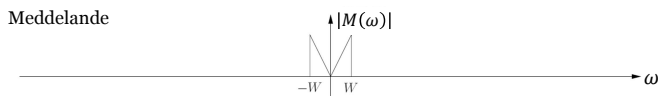
$$x(t) = Am(t) \cos(\omega_c t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{A}{2}(M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c))$$

Koherent demodulering:

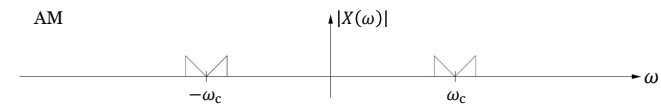
$$y(t) = 2x(t) \cos(\omega_c t) = 2Am(t) \cos^2(\omega_c t) = Am(t)(1 + \cos(2\omega_c t))$$

$$Y(\omega) = X(\omega + \omega_c) + X(\omega - \omega_c) = AM(\omega) + \frac{A}{2}(M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega - 2\omega_c))$$

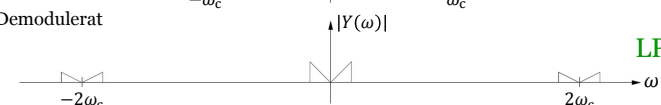
Meddelande



AM



Demodulerat

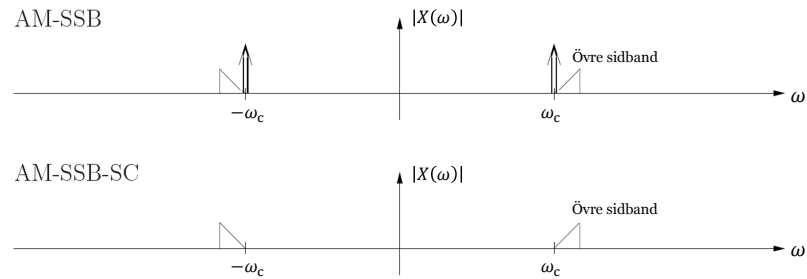


AM-SSB – Enkelt sidband

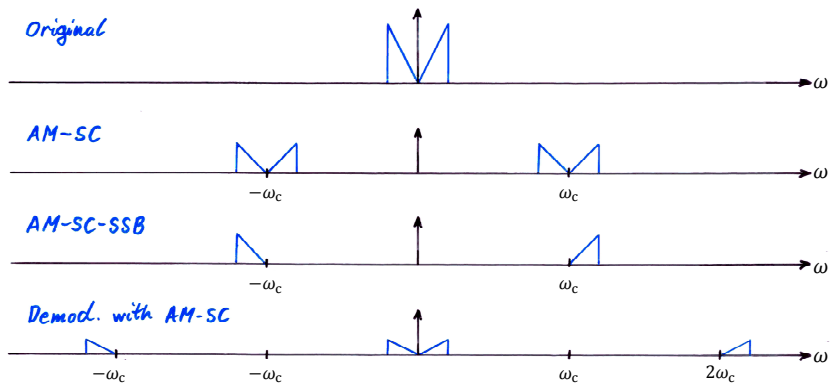
AM (SC) använder dubbelt så mycket bandbredd som behövs.

Vardera sidband innehåller all information.

Filtrera bort ett av sidbanden.



Demodulera SSB



LP-filter again!

Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se