Lösningar

1. **a.** $E_p(r) = -\frac{k}{r^3}$ $(k = 10\ \text{Jm}^3)$

$W(r=2 \rightarrow r=1) = E_p(r=2) - E_p(r=1) = -k(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1}) = \frac{7k}{8} = \frac{70}{8} = 8.75\ \text{J}$

b. $\Delta E_k(r=2 \rightarrow r=1) = W(r=2 \rightarrow r=1) = -\Delta E_p(r=2 \rightarrow r=1) = 8.75\ \text{J}$

c. $W(r=1 \rightarrow r=2) = E_p(r=1) - E_p(r=2) = -k(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^3}) = -\frac{7k}{8} = -\frac{70}{8} = -8.75\ \text{J}$

d. $\Delta E_k(r=1 \rightarrow r=2) = W(r=1 \rightarrow r=2) = -\Delta E_p(r=1 \rightarrow r=2) = -8.75\ \text{J}$

e. $\overline{F} = -\frac{dE_p}{dr}\hat{r} = -\frac{d}{dr}(-kr^{-3})\hat{r} = -\frac{3k}{r^4}\hat{r}$

$\overline{F}(r=1) = -\frac{30}{1}\hat{r} = -30\hat{r}\ \text{N}$ **;** $\overline{F}(r=2) = -\frac{30}{16}\hat{r} = -1.9\hat{r}\ \text{N}$

Svar: **a.** $W(r=2 \rightarrow r=1) = 8.75\ \text{J}$; **b.** $\Delta E_k(r=2 \rightarrow r=1) = 8.75\ \text{J}$

c. $W(r=1 \rightarrow r=2) = -8.75\ \text{J}$ **; d.** $\Delta E_k(r=1 \rightarrow r=2) = -8.75\ \text{J}$

e. $\overline{F}(r=1) = -30\hat{r}\ \text{N}$ **;** $\overline{F}(r=2) = -1.9\hat{r}\ \text{N}$

---

2. $\overline{F} = -kx^2\hat{x} \Rightarrow -\frac{dE_p}{dx} = -kx^2 \Rightarrow E_p = \frac{kx^3}{3} + C$

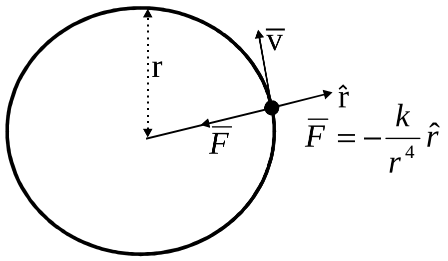
$E_p(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow E_p(x) = \frac{kx^3}{3}$

Svar: $E_p(x) = \frac{kx^3}{3}$

---

3. Cirkelbana: F=Centripetalkraft

$F = -\frac{k}{r^4} = -\frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{k}{mr^3}$



Kinetisk energi: $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{k}{2r^3}$

Potentiell energi: $E_p = \int_0^{E_p} dE_p = -\int_\infty^r \overline{F} \bullet d\overline{r} = -\int_\infty^r -\frac{k}{r^4}\,dr = \left[-\frac{1}{3}\frac{k}{r^3}\right]_\infty^r = -\frac{1}{3}\frac{k}{r^3}$

Total energi: $E_{tot} = E_k + E_p = \frac{k}{2r^3} - \frac{1}{3}\frac{k}{r^3} = \frac{1}{6}\frac{k}{r^3}$

Svar a) $E_{tot}(r) = \frac{1}{6}\frac{k}{r^3}$

---

4. $E_p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 1$

Jämviktsläge då $\frac{dE_p}{dx} = 0$

$$\frac{dE_p}{dx} = x^2 - 3x + 2$$

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \text{ labilt} \\ x_2 = 2 \text{ stabilt} \end{cases}$$

x		1		2	
$\frac{dE_p}{dx}$	+	0	-	0	+
E_p		max		min	

Svar: $x_1 = 1$ labilt; $x_2 = 2$ stabilt

---

5. Det finns 2 krafter: $m\bar{g}$ och $\bar{F} = -F\hat{\theta}$

$$\bar{F}_{tot} = m\bar{g} - F\hat{\theta} = -mg\cos\phi\hat{r} + (mg\sin\phi - F)\hat{\theta} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$$

Sätt sträckan längs periferin $s = r\phi$. Kraftkomponenten i en viss riktning är negativa riktningsderivatan av potentiella energin. $\Rightarrow -\frac{dE_p}{ds} = F_s = F_\theta$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{ds} = \frac{dE_p}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dE_p}{rd\phi} = -F_\theta = -mg\sin\phi + F$$

$$\Rightarrow E_p = mgr\cos\phi + Fr\phi + C$$

Jämvikt då $\frac{dE_p}{d\phi} = 0$; $\Rightarrow \frac{dE_p}{d\phi} = -mgr\sin\phi + Fr = 0 \Rightarrow \phi = \arcsin\frac{F}{mg}$

ϕ		$\arcsin\frac{F}{mg}$	
$\frac{dE_p}{d\phi}$	+	0	-
E_p		max	

$\Rightarrow$ labil jämvikt

Svar: Labil jämvikt då $\phi = \arcsin\frac{F}{mg}$

---

6. Totalenergin $E_{tot} = E_p^{man} + E_k^{man} + E_p^{fjäder}$ **.**

$$\left.\begin{aligned} &\text{Sätt } E_p^{man}(\text{före}) = 0 \\ &E_k^{man}(\text{före}) = 0 \\ &E_p^{fjäder}(\text{före}) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{tot}(\text{före}) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &E_p^{man}(\text{vänd}) = -mg(h-l) \\ &E_k^{man}(\text{vänd}) = 0 \\ &E_p^{fjäder}(\text{vänd}) = \frac{1}{2}k(h-l-L)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_{tot}(\text{vänd}) = -mg(h-l) + \frac{1}{2}k(h-l-L)^2$$

$$E_{tot}(\text{före}) = E_{tot} = (\text{vänd}) = -mg(h-l) + \frac{1}{2}k(h-l-L)^2 = 0$$

$$-\frac{2mg}{k}(h-l) + (h-l)^2 + L^2 - 2L(h-l) = 0 \Rightarrow (h-l)^2 - (2L + \frac{2mg}{k})(h-l) + L^2 = 0$$

$$(h-l) = (L + \frac{mg}{k}) \pm \sqrt{(L + \frac{mg}{k})^2 - L^2} = (L + \frac{mg}{k}) \pm \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + \frac{2mgL}{k}}$$

(- anger övre vändläget)

$$h = (L + l + \frac{mg}{k}) + \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + \frac{2mgL}{k}} \approx 40.6 \text{ m}$$

Svar: Höjden $h \approx 40.6$ m

Lösningar

1. **a.** Kraftekvationen $\bar{F} = \dot{\bar{p}} = m\bar{a} = m\ddot{\bar{r}}$; $\bar{r} = x\hat{x}$

$\hat{x}$-led: $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

med den allmänna lösningen: $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ där $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Randvillkoret $x(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

Randvillkoret $x_{max} = A \Rightarrow x = A\sin\omega t$ är en lösning.

b. Potentiella energin E_p

$$\bar{F} = -kx\hat{x} = -\frac{dE_p}{dx}\hat{x} \Rightarrow E_p = \frac{kx^2}{2} + C \text{ ; Sätt } E_p(x=0) = 0 \Rightarrow E_p = \frac{kx^2}{2}$$

$$E_p = \frac{k(A\sin\omega t)^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2\omega t$$

Kinetiska energin $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$; $\dot{x} = A\omega\cos\omega t$; $m = \frac{k}{\omega^2}$

$$E_k = \frac{k(A\omega)^2\cos^2\omega t}{2\omega^2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t$$

$$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t + \frac{kA^2}{2}\sin^2\omega t = \frac{kA^2}{2}$$

Svar: **a.** Randvillkoren $x(t=0) = 0$ och $x_{max} = A$ krävs

b. $E_{tot} = \frac{kA^2}{2}$

---

2. **a.** $\bar{r} = x\hat{x} = a\sin\omega t\hat{x} \Rightarrow \bar{v} = v\hat{x} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\hat{x} = a\omega\cos\omega t\hat{x}$

b. $|\bar{v}|_{max} = a\omega$

c. Periodtiden $P = \frac{2\pi}{\omega}$; $t_1 = \frac{P}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$

$$\langle v(t)\rangle = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} v(t)dt = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} v(t)dt = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} a\omega\cos\omega t dt =$$

$$\frac{2a\omega^2}{\pi}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{2a\omega}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{2a\omega}{\pi} = \frac{4a}{P}$$

Svar: **a.** $\bar{v} = a\omega\cos\omega t\hat{x}$

b. $|\bar{v}|_{max} = a\omega$

c. $\langle v(t)\rangle = \frac{4a}{P}$

---

3. $\theta(t)=\theta_0 e^{-\gamma t}\cos\omega t \Rightarrow \theta_{amplitud}(t)=\theta_0 e^{-\gamma t} \Rightarrow \gamma=\dfrac{\ln\dfrac{\theta_0}{\theta_{amplitud}(t)}}{t}$

10 hela svängningar $\Rightarrow t=20$ s

$$\gamma=\frac{\ln\dfrac{2}{1.5}}{20}=1.44\cdot10^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

Svar: Dämpningskonstanten $\gamma=1.44\cdot10^{-2}\ \text{s}^{-1}$

---

4. För massan *m* fås kraftekvationen $m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}\Rightarrow \ddot{x}+\dfrac{k}{m}x+\dfrac{c}{m}\dot{x}=0$

Standardsubstitutionen $\omega_0^2=\dfrac{k}{m},\gamma=\dfrac{c}{2m}$ ger $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2=0$

Lösning : $x(t)=Ce^{r_1 t}+De^{r_2 t}$ där $r_{1,2}$ är lösn. till karakteristiska ekv.

$r^2+2\gamma r+\omega_0^2=0 \quad\Rightarrow\quad r=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$

Om den karakteristiska ekvationen har två olika reella rötter ($r_1\neq r_2$) får differentialekvationen lösningen:

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left(Ce^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t}+De^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t}\right)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\alpha)$$

där $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

Men om den karakteristiska ekvationens rötter är desamma och reella ($r_1=r_2$) är lösningen:

$$x(t)=e^{-\gamma t}(C+Dt)$$

a. Kritiskt dämpad då: $\omega=0\Rightarrow$

$$\gamma=\omega_0\Rightarrow\frac{c}{2m}=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow c=2\sqrt{mk}\approx110\ \text{Ns/m}$$

b. Vid kritisk dämpning gäller att rötterna till den karakteristiska ekvationen är samma

$(r_1=r_2=-\gamma)\Rightarrow x(t)=e^{-\gamma t}(C+Dt)\Rightarrow \dot{x}(t)=De^{-\gamma t}-\gamma e^{-\gamma t}(C+Dt)$

Använd randvillkoren:

$x(0)=-2,\Rightarrow C=-2$ (komprimering av fjädern betyder att *x* blir negativ, med den valda koordinatriktningen)

$\dot{x}(0)=0\Rightarrow D=-2\gamma \quad\Rightarrow\quad \dot{x}(t)=2\gamma^2 te^{-\gamma t}$

Svar:

a. $c=2\sqrt{mk}\approx110$ Ns/m

b. $\dot{x}(t)=2\gamma^2 te^{-\gamma t}$ cm

---

5. $E_p(x) = \frac{A}{x^n} e^{\alpha x} = Ax^{-n} e^{\alpha x}$

$\frac{dE_p}{dx}(x) = -nAx^{-n-1}e^{\alpha x} + Ax^{-n}\alpha e^{\alpha x} = Ax^{-n}e^{\alpha x}(-nx^{-1} + \alpha) = E_p(x)(\alpha - nx^{-1})$

$\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{n}{\alpha}$ jämviktsläget är ett stabilt minimum

Taylorutveckla $E_p(x)$ kring x_0

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{dE_p}{dx}\Big|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x_0}(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x_0} = \frac{dE_p}{dx}\Big|_{x_0}(\alpha - nx_0^{-1}) + E_p(x_0)(+nx_0^{-2}) = nx_0^{-2}E_p(x_0)$$

$$E_p(x) = E_p(x_0) + 0(x - x_0) + \frac{1}{2}nx_0^{-2}E_p(x_0)(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3 \approx E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

där $k = nx_0^{-2}E_p(x_0) = nx_0^{-2}Ax_0^{-n}e^{\alpha x_0} = Anx_0^{-n-2}e^{\alpha x_0} = An(n\alpha^{-1})^{-n-2}e^n = A\frac{\alpha^{n+2}}{n^{n+1}}e^n$

$$\bar{F} = -\frac{dE_p}{dx}\hat{x} = -k(x - x_0)\hat{x}$$

$\hat{x}$-led: kraftekvationen $m\frac{d^2}{dt^2}(x - x_0) = -k(x - x_0) \Rightarrow$

$\frac{d^2}{dt^2}(x - x_0) + \omega^2(x - x_0)$ där $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Periodtiden $P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\frac{\alpha^{n+2}}{n^{n+1}}e^n}}$

Svar: Periodtiden $P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\frac{\alpha^{n+2}}{n^{n+1}}e^n}}$

---

6. $\bar{F} = F_x\hat{x} = m\ddot{x}\hat{x} = -m\omega^2 x\hat{x} = F_f\hat{x}$

$|F_f| = |m\omega^2 x| \leq \mu mg$

Kroppen glider inte om $|F_f|_{\max} = |m\omega^2 A| \leq \mu mg \Rightarrow$

$\mu \geq \frac{\omega^2 A}{g} = \frac{(2\pi \cdot 0.25)^2 1.5}{9.82} = 0.38$

Svar: $\mu \geq 0.38$
