TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 11

Agenda

- Kursens status
- Kort repetition
- Metoder för heltalsproblem
- Repetition + vi räknar en tenta

Kursens status

- Sista föreläsningen!

- Gruppuppgifter & labbar:
  - Allt avklarat.
  - Besök/maila mig eller Nils om ni har några frågor/problem.

Kursens status

- Tidigare tentor från 2015 och framåt ligger ute på Lisam nu.
- Det kommer att komma ut information om när jag/Nils kommer att vara tillgängliga för frågor inför tentan. Vi åker båda iväg över julen, kommer tillbaka i början av januari.
- Glöm inte kursutvärderingar! All feedback är givetvis välkommen. Var gärna konstruktiva.

Agenda

- Kursens status
- Kort repetition
- Metoder för heltalsproblem
- Repetition + vi räknar en tenta

Förvirring på förra lektionen: upg. 8.26

- Vi tar den på tavlan!

Agenda

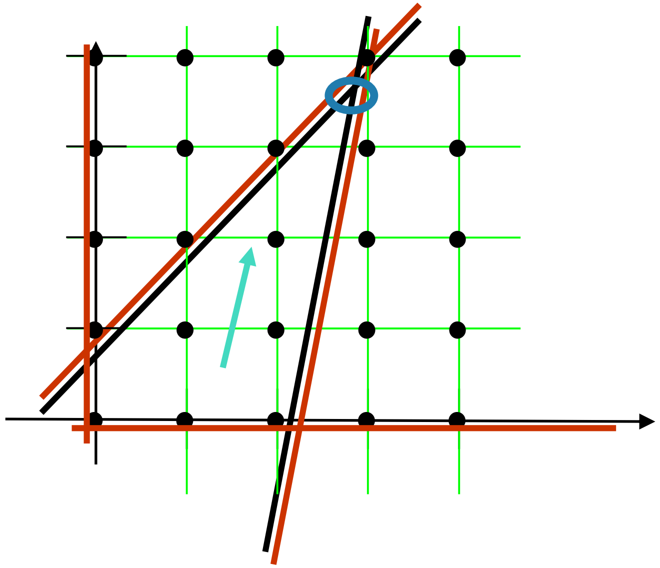
- Kursens status
- Kort repetition
- Metoder för heltalsproblem – kort
- Repetition + vi räknar en tenta

Metoder för heltalsproblem

- Svårigheter med heltalsproblem
- Det konvexa höljet
- Lösningsprinciper

Linjära heltalsproblem

- Kan det verkligen vara så svårt? Är det inte bara att avrunda?
  - Jo, om det är rimligt (dvs. stora värden på var.). Inte annars!



$x^*_{LP} \approx \begin{pmatrix} 2.8 & 3.6 \end{pmatrix}$

Avrunda: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ - otillåten!

Avrunda nedåt: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ - otillåten!

$x^*_{heltal} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$

Vad är svårigheten?

- Heltal borde vara lättare än kontinuerliga variabler (LP)?
  - Begränsat antal möjliga lösningar.
  - LP har ju oändligt många!
- Men för LP:
  - Vad vet vi om optimum (om det finns)?
    - Alltid i (minst) en extrempunkt!
    - Antalet extrempunkter är begränsat.
  - Vi kan följa kantlinjerna från en extrempunkt till en närliggande.
    - Riktningen ges av en kombination av den aktuella punkten och den inkommande basvariabeln (ett av bivillkoren). Då vet vi även utgående basvariabel.
    - Längden på steget ges av (minst) ett villkor.

Vad är svårigheten?

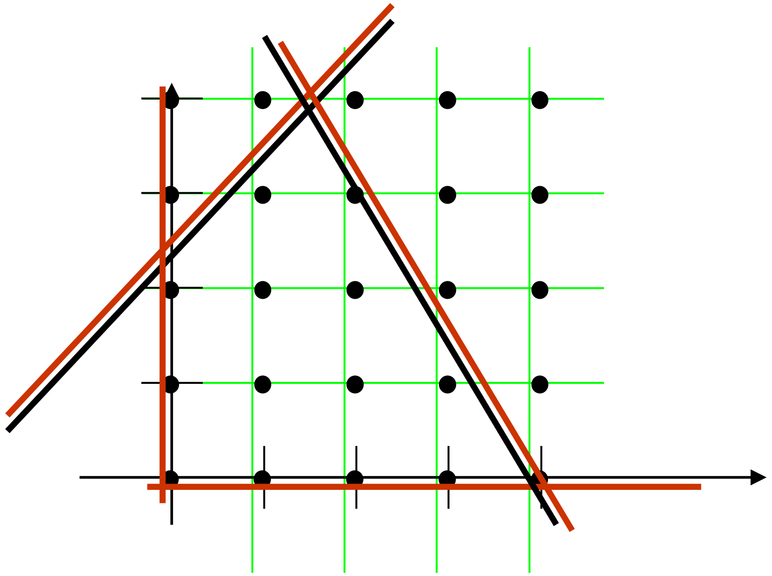
- Men för HP:
  - ”Ingen aning” i vilken riktning de närliggande heltalspunkterna ligger
  - ”Ingen aning” om vilken steglängd som är lämplig

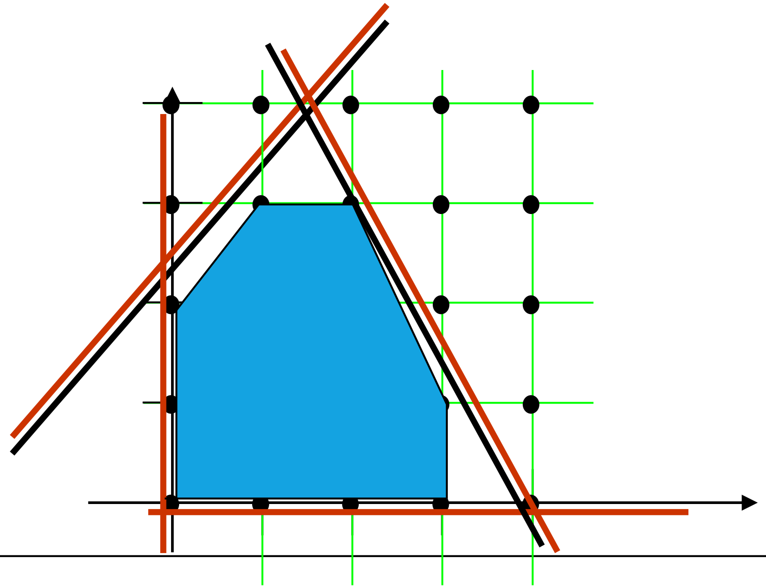
Generell sökmetod

Steg 0	Börja i en tillåten startpunkt
Steg 1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning
Steg 2	Kontrollera avbrott. Saknas tillåten och förbättrande sökriktning är vi i (lokalt) opt
Steg 3	Bestäm steglängd
Steg 4	Beräkna nya punkten genom att gå steglängden i förbättrande sökriktningen
Steg 5	Repetera från steg 1

Det konvexa höljet

- Konvexa höljet till en mängd punkter
  - Alla möjliga konvexkombinationer av alla punkter
- Varför intressant?
  - Om det konvexa höljet är känt, kan HP formuleras och lösas som ett LP
  - Alla hörnpunkter är heltaliga!





Lösningsprinciper

- Uppräkning
  - Fullständig
    - Se nästa sida!
  - Trädsökning
    - Lös delproblem, ger upphov till ett sökträd
- Relaxation, dekomposition
  - Lös fler, enklare, problem istället.
    - Det finns många varianter
- Plansnittning
  - S.k. bivillkorsgenerering
- Heuristiker
  - Tumregler/icke-exakta metoder
    - Garanterar inte optimum
    - Ofta enkla att förstå
    - Ofta rätt enkla att implementera
  - Användbara för att generera uppskattningar på lösningar
  - Användbara för problem som är stora eller svåra att lösa

Exempel lösningstider

- Lösningstid, fullständig uppräkning, exempel:
  - 0/1 variabler
  - 1 ns per utvärdering (tillåten? målfknvärde?)
    - 10 variabler
      - 1 mikrosekund
    - 20 variabler
      - 1 millisekund
    - 30 variabler
      - 1 sekund
    - 50 variabler
      - 12 dagar
    - 90 variabler
      - 30 milliarder år….

- Lösningstid, Cplex, exempel:
  - 40 variabler
  - 40 linjära bivillkor
  - LP-relaxation
    - z*=2667,99
    - C-plex 0,016 sek
  - Heltal
    - z*=2614 (98.0%)
    - C-plex 2,312 sek (144 ggr)

Lösningsprinciper

- Uppräkning
  - Fullständig
    - Se nästa sida!
  - Trädsökning
    - Lös delproblem, ger upphov till ett sökträd
- Relaxation, dekomposition
  - Lös fler, enklare, problem istället.
    - Det finns många varianter
- Plansnittning
  - S.k. bivillkorsgenerering

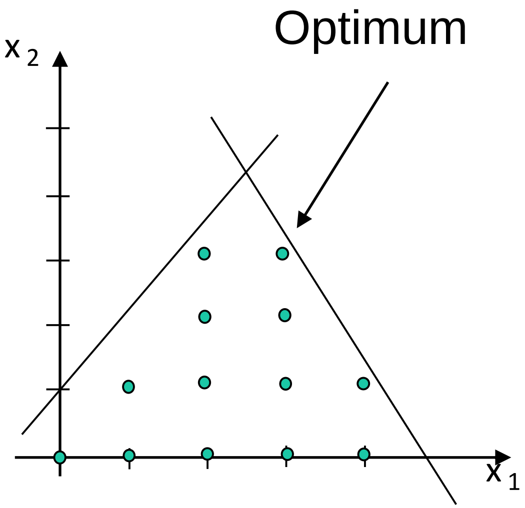
DÅLIG IDÉ!

- Heuristiker
  - Tumregler/icke-exakta metoder
    - Garanterar inte optimum
    - Ofta enkla att förstå
    - Ofta rätt enkla att implementera
  - Användbara för att generera uppskattningar på lösningar
  - Användbara för problem som är stora eller svåra att lösa

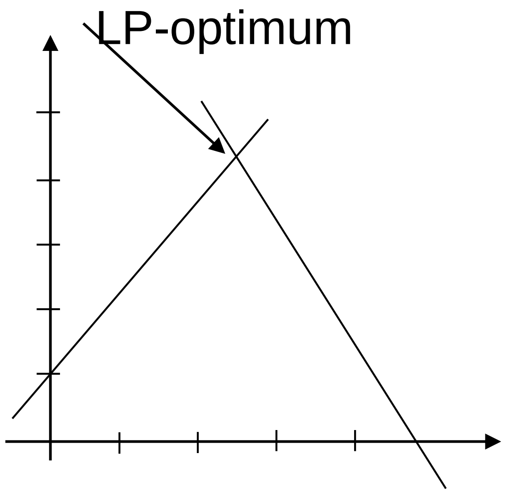
Relaxation

- Relaxation ger optimistisk uppskattning av optimala målfunktionsvärdet
- Idé, om vi tar bort de ”svåra” villkoren kan vi få ut intressant information
- LP-relaxation: Ta bort heltalskrav på variabler
- Lagrangerelaxation: Ta bort svåra villkor och straffa brott mot dessa villkor i målfunktionen

Ursprungligt problem



Relaxation
(LP-relaxation)



Modellering avgörande i HP-modellering

- Många problem kan modelleras på många olika sätt
- Kan betraktas som del av lösningsförfarandet (pre-processing)
  - Samma tillåtna lösningar
    - Enkelt exempel: $x_1 \le 2, \quad x_1 \ge 0, \text{heltal}; \ x_2 = 0$
    - Är ekvivalent med: $x_1 + 3x_2 \le 2.25, \quad x_1, x_2 \ge 0, \text{heltal}$
  - Olika starka formuleringar

Agenda

- Kursens status
- Kort repetition
- Metoder för heltalsproblem
- Repetition + vi räknar en tenta

Vad har ni lärt er?

- Matematiskt språk
- Kvantitativt angreppssätt
- Matematisk modellering
  - Målfunktion, variabler/beslut, begränsningar/bivillkor
- Matematik som verktyg i beslut
  - Med detaljer från verktygslådan modellering & optimering
- Hur saker hänger ihop
  - Via matematiska samband
- Hur saker kan påverkar varandra
  - Beslut och förändringar som ger konsekvenser i många olika situationer
- Tolkning av utdata från (kommersiella) system
  - Vilka beslut kan stödjas och hur
- Möjlighet till känslighetsanalys
  - Tillämpa och använda sidoinformation som fås ur användandet av matematik
  - Hur funkar det?
    - Vilka typer av frågor kan besvaras
- +Ett antal metoder för problemtyper som
  - Linjärprogrammering, Billigaste väg, Minkostnadsflöde, …

Kursmål

Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för minkostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

Examination

- Tenta (2hp)
  - Tillåtna hjälpmedel
    - Miniräknare, linjal, en A4 med valfria anteckningar (båda sidor)
  - Tänk på att trädsökning och minsta uppspännande träd inte undervisas i årets upplaga men har examinerats i tidigare års tentor
- Labbar (2hp)
- Gruppuppgifter (2hp)

Vi räknar en tenta på tavlan!

God jul!

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET