

TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 10

Agenda

- Kursens status
- Repetition – Flödesnätverk
- Optimalitetsvillkor – LP och Minkostandsflöde (MKF)
- Nätverkssimplex
- Känslighetsanalys
- Exempel: MKF och Nätverkssimplex

Kursens status

- Föreläsning 10/11!
- Gruppuppgifter:
 - Gruppuppgift 1:
 - Alla har redovisat. Alla inlämningar rättade.
 - Gruppuppgift 2:
 - Alla har redovisat. Alla (?) har lämnat in. Rättning pågår.
 - Gruppuppgift 3:
 - Finns på Lisam.. Jag kommer inte börja rätta innan jul, så ni kan lämna in efter om ni vill. (Men det kan ju vara trevligt att lämna in innan julen, ändå...)
- Laborationsmomenten:
 - Alla moment avklarade. Rapportskrivandet pågår. Några har lämnat in.
 - Om er modell inte funkar: kom till mig eller Nils!

Kursens status

- Tidigare tentor från 2016 och framåt ligger ute på Lisam i eftermiddag.
- Räkna så många/få ni vill...
- Det kommer att komma ut information om när Nils kommer att vara tillgängliga för frågor inför tentan. Vi åker båda iväg över julen, kommer tillbaka i början av januari.

Agenda

- Kursens status
- Repetition – Flödesnätverk
- Optimalitetsvillkor – LP och Minkostandsflöde (MKF)
- Nätverkssimplex
- Känslighetsanalys
- Exempel: MKF och Nätverkssimplex

Flödesnätverk (repetition)

- Definiera
 - x_{ij} = flödet på båge (i,j) från nod i till nod j
 - Nodstyrka
 - $d_i = \sum_{j|b_{ji} \in B} x_{ji} - \sum_{j|b_{ij} \in B} x_{ij} = \text{inflöde-utflöde}$
 - Om $d_i < 0$, i är en **källa**
 - Om $d_i > 0$, i är en **sänka**
 - Om $d_i = 0$, i är en **mellannod**
- Minkostnadsflöde:
 - Givet ett nätverk, finn ett flöde med minimal kostnad så att givna käll- och sänkstyrkor på noder uppfylls, och så att kapacitetsbegränsningar på bågar inte överskrids.

Agenda

- Kursens status
- Repetition – Flödesnätverk
- Optimalitetsvillkor – LP och Minkostandsflöde (MKF)
- Nätverkssimplex
- Känslighetsanalys
- Exempel: MKF och Nätverkssimplex

Optimalitetsvillkor, LP

- Minns en optimal simplextablå, slackvariabler och reducerade kostnaden
 - Vad är reducerade kostnaden för en variabel som har ett värde? / Vad står i målfknraden för basvariabler?
 - 0!
 - Om en variabel har en reducerad kostnad (dvs har ett värde i målfknraden), vilken sorts variabel är det, och vilket värde har variabeln?
 - Icke-basvariabel! De har värdet 0 per definition.
- → Optimalitetsvillkor:
 - (reducerad kostnad)*(variabelvärde)=0
 - + tillåtenhet.
 - + rätt tecken på reducerade kostnader

Koppling mellan LP och MKF

- Baslösning i LP
 - Motsvaras av basträd i minikostnadsflödesnätverk
- Basvariabel i LP – Kan vara skild från 0
 - Motsvaras av basbåge i minikostnadsflöde
 - Kan ha vilket (tillåtet) flöde som helst
- Icke-basvariabel i LP – Måste vara 0
 - Motsvaras av icke-basbåge i minikostnadsflöde
 - Måste ha ett flöde på undre ELLER övre gränsen

Identifiera bassträd från från optimalitetsvillkor

- Optvillkor:

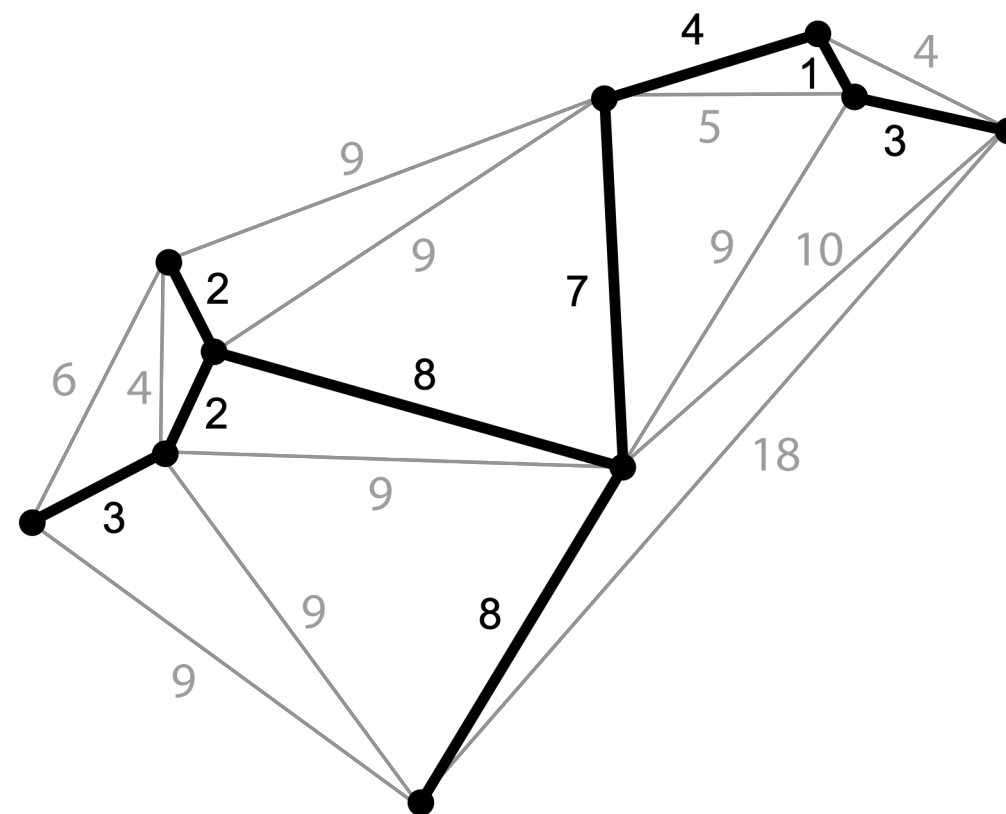
$x_{ij} = l_{ij} \implies \bar{c}_{ij} \geq 0$	$\bar{c}_{ij} > 0 \implies x_{ij} = l_{ij}$
$x_{ij} = u_{ij} \implies \bar{c}_{ij} \leq 0$	$\bar{c}_{ij} < 0 \implies x_{ij} = u_{ij}$
$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \implies \bar{c}_{ij} = 0$	$\bar{c}_{ij} = 0 \implies l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

- Antag n noder i problemet
- Om flödet ligger strikt mellan undre & övre gräns
 - Bågen måste vara en basbåge
 - Per definition är reducerade kostnaden = 0 för basbågar

- Om antal bågar strikt mellan undre & övre gräns (och alla flöden tillåtna)
 - Fler än $n-1$; ej tillåtet basflöde
 - Exakt lika med $n-1$; Om bågarna bildar ett uppspannande träd, då har vi basflöde
 - Färre än $n-1$
 - Lägg till (valfria) bågar, så att ett uppspannande träd bildas
 - Dessa är också basbågar

Uppspännande träd, repetition

”grafens alla noder finns representerade utan några cykler”



Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1			
2			
3			

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2			
3			

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2	Bestäm steglängd		
3			

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2	Bestäm steglängd		
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2	Bestäm steglängd		
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd		
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	Inkommande basbåge
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	Inkommande basbåge
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	Utgående basbåge
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	Inkommande basbåge
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	Utgående basbåge
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	Uppdatera flöden, upprepa

Algoritm, MKF

1. Antag tillåtet flöde och basträd
 - Identifiera basbågar, genom att kolla flödet på alla bågar
 - $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow$ båge (i, j) är en basbåge
 - Ev. komplettera till ett basträd
2. Beräkna reducerad kostnad
 - Börja med att beräkna nodpriser
 - Sätt t.ex. $y_1 = 0$
 - Beräkna $y_j = c_{ij} + y_i$ (i basträdet)
 - Beräkna reducerad kostnad för icke-basbågar
 $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$
3. Kontrollera avbrottskriterie
 - Om alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren är det aktuella flödet optimalt
4. Bestäm inkommande basbåge
 - Välj den icke-basbåge som inte uppfyller optvillkor, och har störst absolutbelopp av reducerad kostnad
 - Om den reducerad kostnad är negativ vill en öka flödet i den bågen, om positivt vill en minska det
5. Bestäm utgående basbåge
 - Förändra flödet maximalt, i den cykel som kommer
 - Den båge som först begränsar är utgående
6. Ersätt utgående basbåge med inkommande basbåge till nytt basträd
7. Uppdatera flödet i nätverket och gå till 2

$$x_{ij} = l_{ij} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{ij} \geq 0$$

$$x_{ij} = u_{ij} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{ij} \leq 0$$

$$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{ij} = 0$$

Algoritm, MKF

0) Antag tillåtet flöde & basträd

- Ev. fas 1; (ingår ej i kurs)
- Identifiera basbågar
 - $l_y < x_y < u_y \Rightarrow$ båge (i,j) basbåge
 - Ev. komplettera till ett (bas)träd

1) Beräkna reducerad kostnad

- Börja med att beräkna nodpriser
 - Utnyttja att $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j = 0$ för basbågarna $y_j = c_{ij} + y_i$
 - Sätt tex $y_1 = 0$
- Beräkna $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$ för icke-basbågar

2) Kontrollera avbrottskriterie

- Om alla bågar uppfyller villkoren: så är aktuellt flöde optimalt
 - $x_y = l_y \Rightarrow \bar{c}_y \geq 0$
 - $x_y = u_y \Rightarrow \bar{c}_y \leq 0$
 - $(l_y < x_y < u_y \Rightarrow \bar{c}_y = 0)$

3) Bestäm inkommande basbåge

- $\bar{c}_{pq} = \max_{(i,j) \in I} |\bar{c}_{ij}|$
 - Där I är mängden av icke-basbågar som ej uppfyller optvillkor. Om $\bar{c}_{pq} < 0$ vill man öka flödet i den bågen, om $\bar{c}_{pq} > 0$ vill man minska flödet.

4) Bestäm utgående basbåge

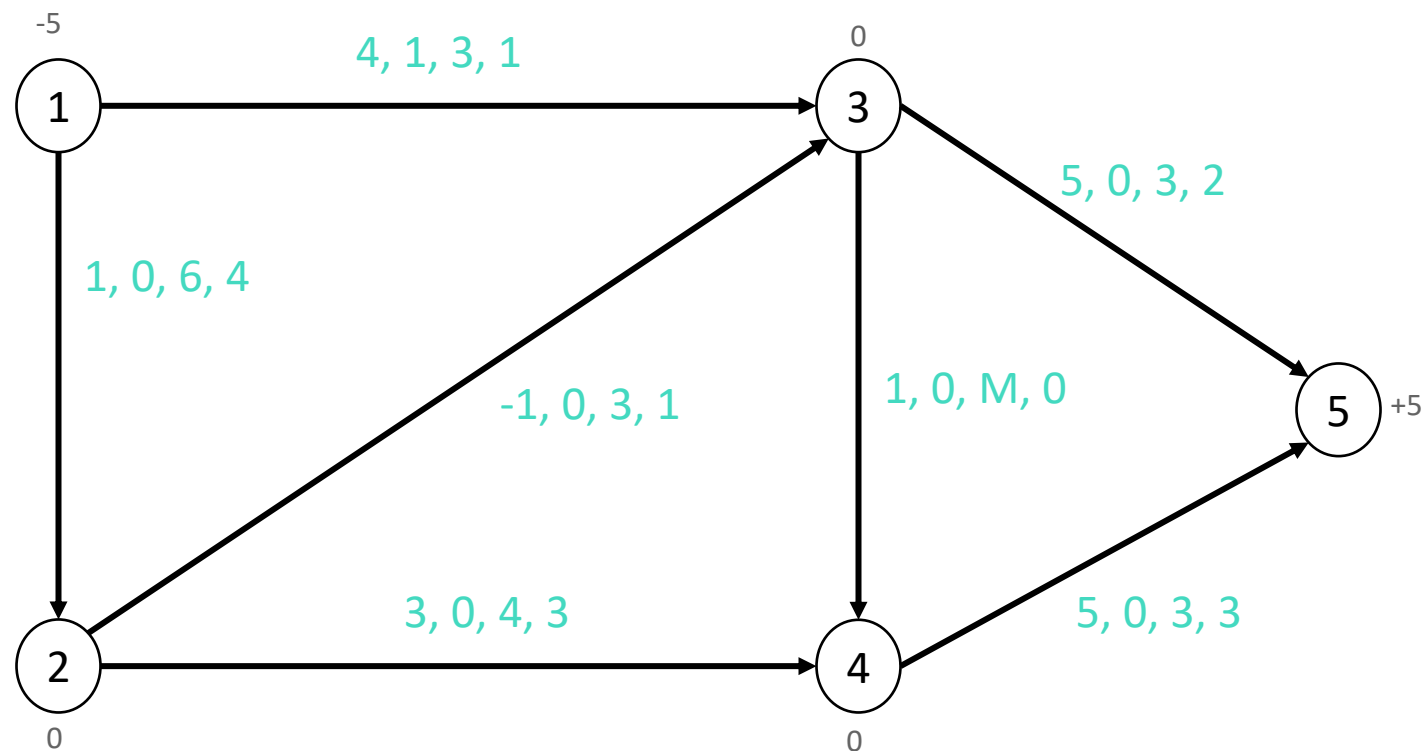
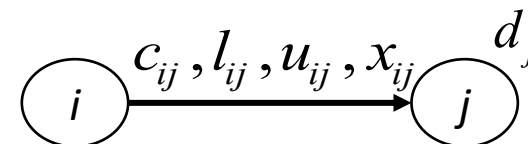
- $\theta = \min \{ \theta^+, \theta^- \}$, där
 - $\theta^+ = \min \{ (u_y - x_y) | (i,j) \text{ framåtbåge i cykeln} \}$
 - $\theta^- = \min \{ (x_y - l_y) | (i,j) \text{ bakåtbåge i cykeln} \}$
- Den båge som först begränsar blir utgående (r,s)

5) Ersätt basbåge (r,s) med ny basbåge (p,q)

6) Uppdatera flödet i nätverket och gå till 1

MKF

Sök minkostnadsflöde i nedanstående nätverk
 Starta med nedanstående (tillåtna) flöde

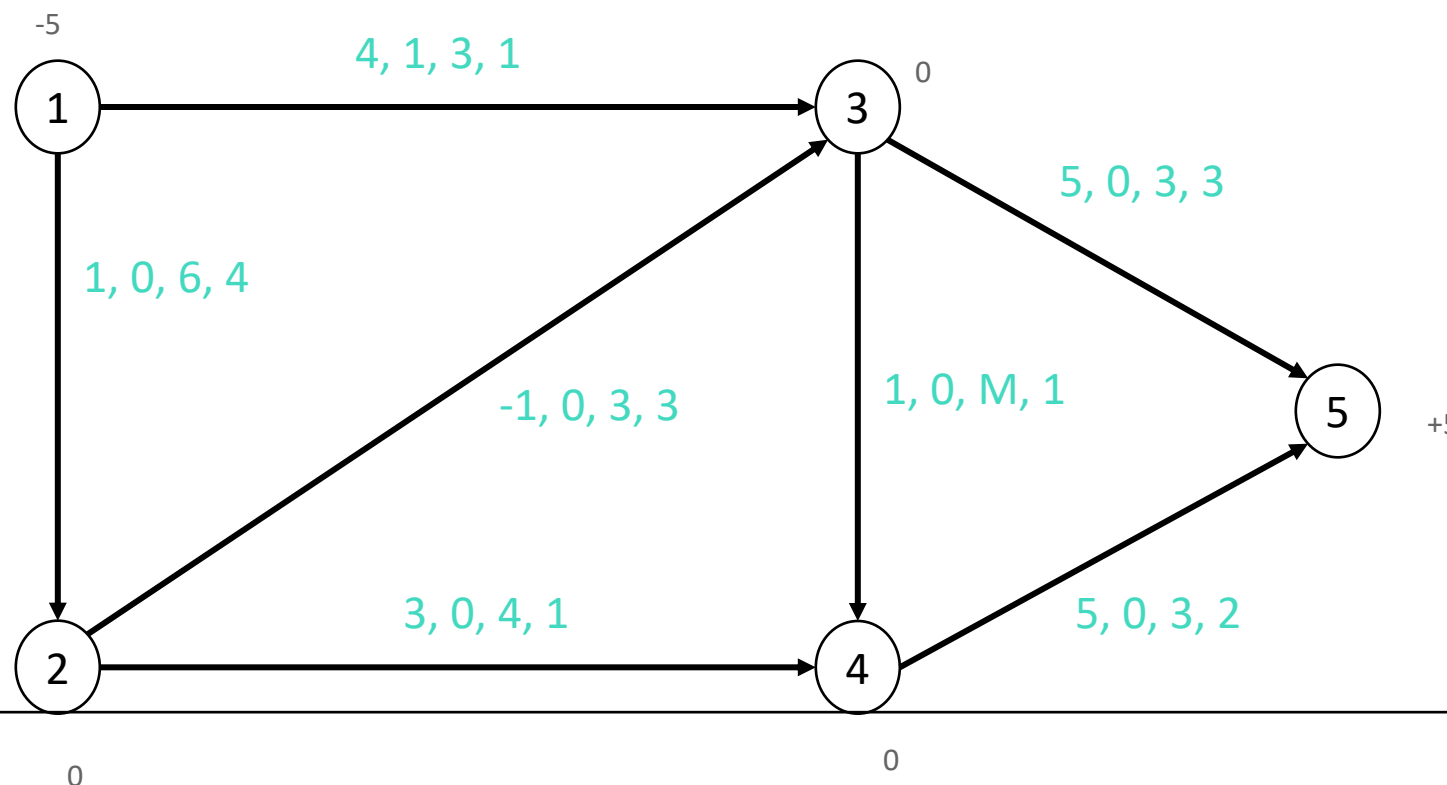
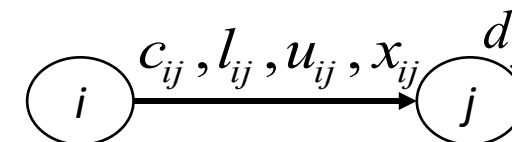


Exempel, känslighetsanalys, MKF

- Hur mycket får en ny båge kosta för att vara intressant?
 - Antag att ny båge (a, b) är (från början) icke-bas: $x_{ab} = l_{ab}$
 - Tas in i basen om $\bar{c}_{ab} = c_{ab} + y_a - y_b < 0$, dvs $c_{ab} < -y_a + y_b$
- Hur mycket tjänar vi på att kapaciteten i en båge ökas?
 - Ges av bågens reducerade kostnad
- Hur mycket kostar det om flödeskravet till en nod stiger med 1
 - Ges av nodpriset
- Hur mycket kostar det om flödeskravet på en båge stiger med 1
 - Ges av bågens reducerade kostnad
- Hur kan bågkostnad förändras, utan att uppsättningen använda (bas)bågar ändras?
 - Ges av bibehållna (optimala) reducerade kostnader

MKF, känslighetsanalys

I nedanstående optimala nätverk, besvara frågorna på nästa sida.



Frågor på det optimala flödet

- Antag att det fanns en båge mellan 1 & 4. Hur mycket skulle den få kosta, för att vara intressant att använda?
- Hur förändras kostnaden, om flödet i båge (1,3) måste öka med en enhet?
- Vad skulle det kosta att skicka 6 istället för 5 enheter genom nätverket? Vad blir marginalkostnaden?
 - För vilken flödesökning är den marginalkostnaden giltig?
- Hur mycket kan kostnaden i båge (2,4) öka, utan att baslösningen ändras
- Vilken blir lösningen om vi lägger till båge (1,5), med en kostnad på 6, undre gräns 0 och övre gräns 2?

Minkostnadsflöde

- Olika specialfall av minkostnadsflöde
 - Transportproblemet (Sid 55)
 - Genomskeppningsproblemet (Sid 59)
 - Billigastevägproblemet (Kap 8.4)
- Specialfallen har specialalgoritmer
 - Försök att utnyttja strukturen i varje problemtyp
- Utvidgning minkostnadsflöde
 - Flera varutyper (Multi-commodity) (Sid 219)
 - Vinster/Förluster (Sid 220)

www.liu.se