

# TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 8

# Agenda

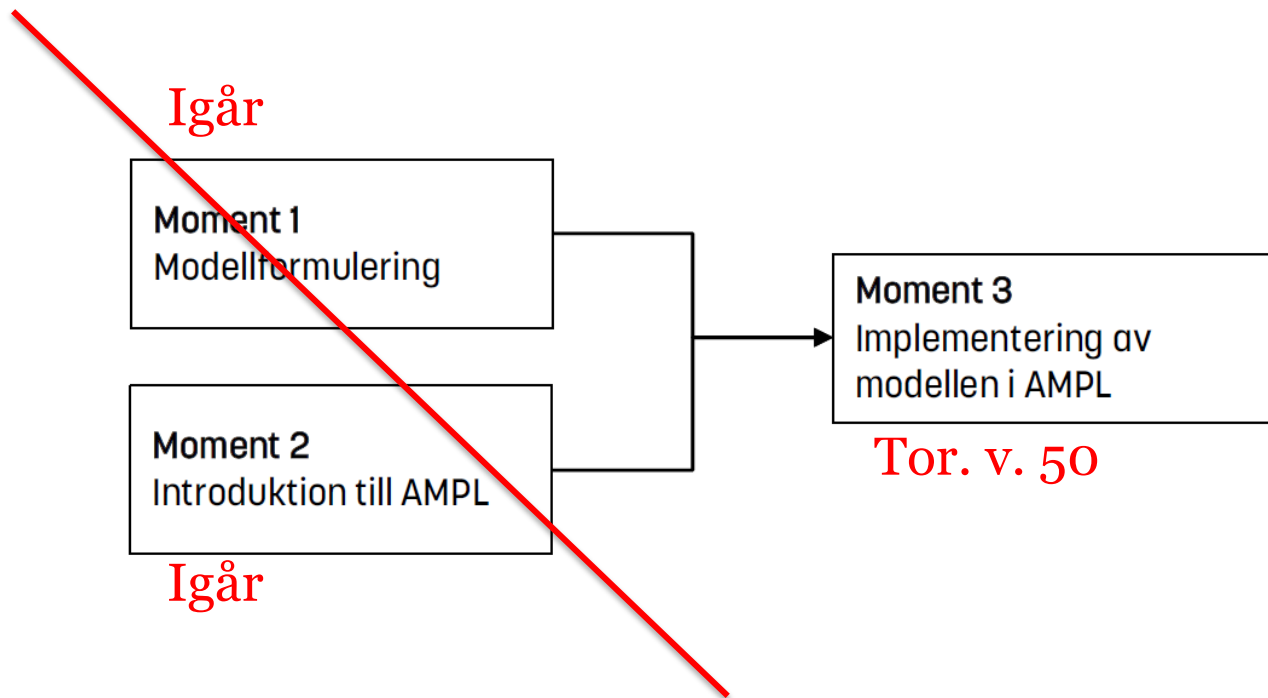
- Kursens status
- Simplex - redundans, degeneration
- Relaxation/restriktion
- Känslighetsanalys

# Kursens status

- Föreläsning (1), 2-5: Modeller
- Föreläsning 6-10, (11): Lösningmetod/känslighetsanalys
- Gruppuppgifter:
  - Gruppuppgift 1:
    - Alla har redovisat muntligt. Många har lämnat in på Lisam. Rättning pågår.
  - Gruppuppgift 2:
    - Redovisas muntligt nästa vecka.
  - Gruppuppgift 3:
    - Redovisas skriftligt senast fredag v. 51. Uppgiften och en anmälningslista kommer läggas upp på Lisam efter att redovisningarna av Gruppuppgift 2 är genomförda.

# Kursens status

- Laborationsmomenten:
  - Läs redan nu labbinstruktionen som ligger på Lisam!



# Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP
- Föreläsning 4: matematisk modellering, HP
- Föreläsning 5: matematisk modellering, nätverk
- Föreläsning 6: tolkning av utdata. Introduktion till lösningsmetoder
- Föreläsning 7: Baslösning, simplexmetoden, simplexmetoden på tablåform (även på LE6).

# Idag

Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för minkostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

# Agenda

- Kursens status
- Simplex – redundans, degeneration
- Relaxation/restriktion
- Känslighetsanalys

# Simplex: exempel, upg. 4.8

$$\max z = 3x_1 + 6x_2$$

då  ~~$2x_1 + 4x_2 \leq 24 (A)$~~

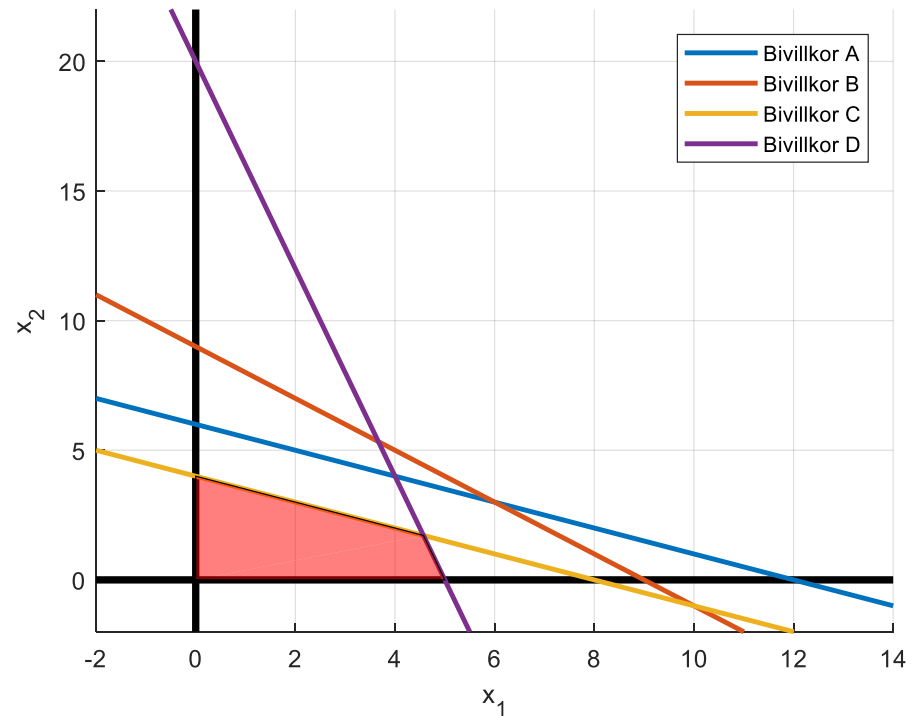
~~$3x_1 + 3x_2 \leq 27 (B)$~~

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24 (C)$$

$$4x_1 + 1x_2 \leq 20 (D)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Redundanta





# Simplex: exempel, upg. 4.8

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 \\ \text{då} \quad 3x_1 + 6x_2 &\leq 24 \text{ (C)} \\ 4x_1 + 1x_2 &\leq 20 \text{ (D)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 \\ \text{då} \quad 3x_1 + 6x_2 + s_1 &= 24 \text{ (C)} \\ 4x_1 + 1x_2 + s_2 &= 20 \text{ (D)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Initialbaslösning: s1, s2

Basvar/var	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	
z	1	-3	-6			0
s <sub>1</sub>		3	6	1		24
s <sub>2</sub>		4	1		1	20

x<sub>2</sub> inkommande,  
s<sub>1</sub> utgående

Basvar/var	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	
z	1			1		24
x <sub>2</sub>		1/2	1	1/6		4
s <sub>2</sub>		7/2		-1/6	1	16

Optimum? Unikt?

# Simplex: exempel, upg. 4.8

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 \\ \text{då} \quad 3x_1 + 6x_2 &\leq 24 \text{ (C)} \\ 4x_1 + 1x_2 &\leq 20 \text{ (D)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 \\ \text{då} \quad 3x_1 + 6x_2 + s_1 &= 24 \text{ (C)} \\ 4x_1 + 1x_2 + s_2 &= 20 \text{ (D)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Basvar/var	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	
z	1			1		24
x <sub>2</sub>		1/2	1	1/6		4
s <sub>2</sub>		7/2		-1/6	1	16

Basvar/var	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	
z	1			1		24
x <sub>2</sub>			1	1/7	-1/7	12/7
x <sub>1</sub>		1		-1/21	2/7	32/7

x<sub>1</sub> inkommande,  
s<sub>2</sub> utgående

**Två optimala baslösningar!**

# Simplex: exempel, upg. 4.8

$\max z = 3x_1 + 6x_2$

då  ~~$2x_1 + 4x_2 \leq 24 (A)$~~

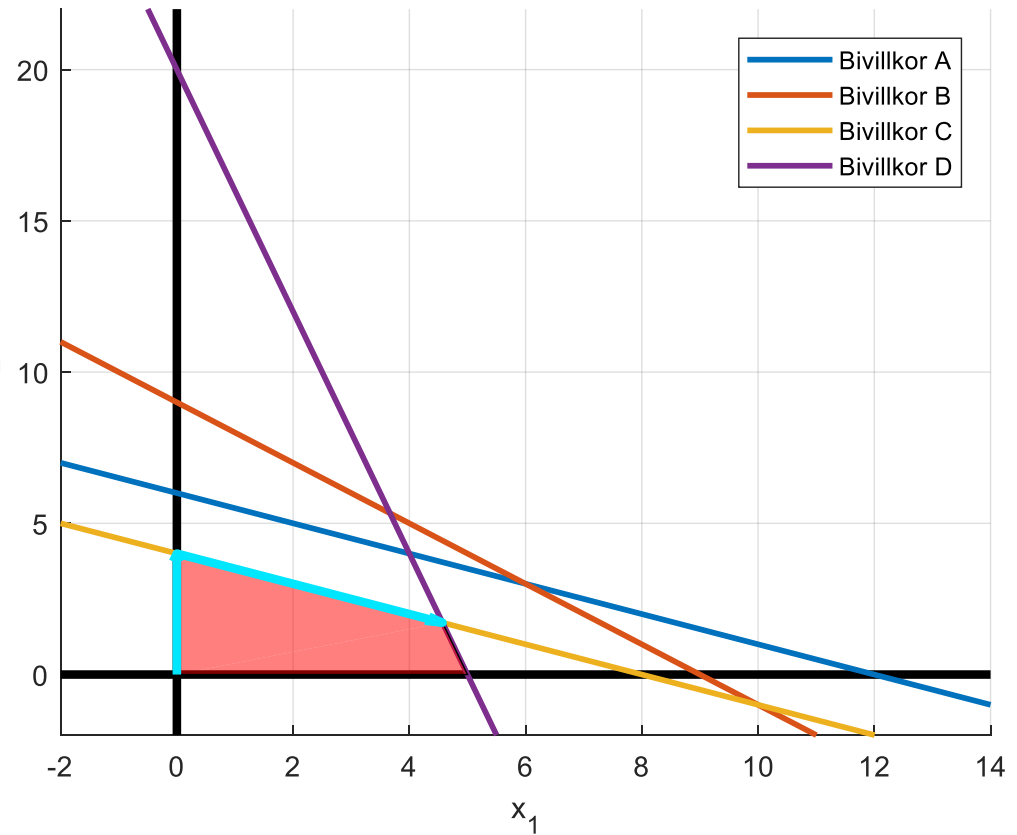
~~$3x_1 + 3x_2 \leq 27 (B)$~~

$3x_1 + 6x_2 \leq 24 (C)$

$4x_1 + 1x_2 \leq 20 (D)$

$x_1, x_2 \geq 0$

Redundanta

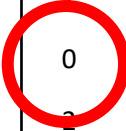


# Degenerering: exempel, kap 4.9, sid. 104

Obs: max istället för min!

Initialbaslösning:  $s_1, s_2, s_3$

Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$		Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1	-1	-1				0	$z$	1		-2	1			2
$s_1$		1	-1	1			2	$x_1$		1	-1	1			2
$s_2$		2	-1		1		4	$s_2$			1	-2	1		0
$s_3$			1			1	2	$s_3$			1			1	2



$x_1$  (eller  $x_2$ ) inkommande,  
 $s_1$  (eller  $s_2$ , eller  $s_3$ ) utgående

$x_2$  inkommande,  
 $s_2$  utgående

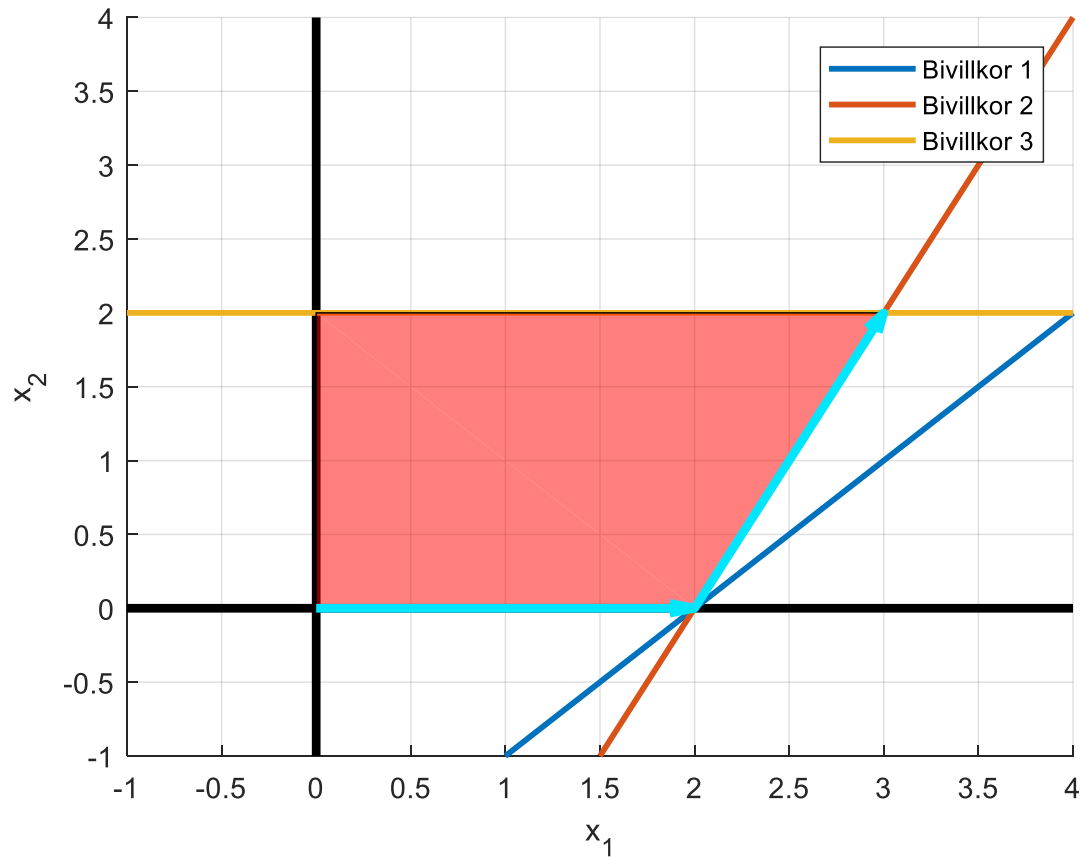
# Degenerering: exempel, kap 4.9, sid. 104

Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$		Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$z$	1			-3	2		2	$z$	1				1/2	3/2	5
$x_1$		1		-1	1		2	$x_1$		1			1/2	1/2	3
$x_2$			1	-2	1		0	$x_2$			1			1	2
$s_3$				2	-1	1	2	$s_1$				1	-1/2	1/2	1

$s_1$  inkommande,  
 $s_3$  utgående

Optimum!

# Degenerering: exempel, kap 4.9, sid. 104



# Agenda

- Kursens status
- Simplex – redundans, degeneration
- Relaxation/restriktion
- Känslighetsanalys

# Relaxation/restriktion

- Relaxation
  - Förändring som (ev.) utökar tillåtna området
    - ”Större” utrymme i bivillkor
    - Bivillkor tas bort
    - Nya variabler införs
  - Optimalt målfunktionsvärde kommer inte att försämrans
- Restriktion
  - Förändring som (ev.) minskar tillåtna området
    - ”Mindre” utrymme i bivillkor
    - Bivillkor läggs bort
    - Variabler tas bort
  - Optimalt målfunktionsvärde kan inte förbättras



# Agenda

- Kursens status
- Simplex – redundans, degeneration
- Relaxation/restriktion
- Känslighetsanalys

# Känslighetsanalys

- Hur känslig är en lösning för störningar?
  - Värdet av förändringar i indata
    - Kapaciteter (högerled)
    - Förbrukning (bivillkorskoeff.)
    - Kostnader (målfunktionskoefficient)
  - Effekt av osäkerhet i indata
- Vad händer/kan hända vid förändringar?
  - Hur förändras målfunktionsvärdet?
  - Hur förändras lösningen?/Hur robust är den?
  - Under vilka förutsättningar förändras inte
    - Lösningen?
    - Basuppsättningen?
- Analys sker ur data från ursprunglig lösning
  - Inget behov för reoptimering

# Målfunktionsförändring, ickebasvariabler

- Förändrad målfunktionskoefficient

- Förändrad lutning, målfunktionen

- Små förändringar

- Inget förändrat målfunktionsvärde

- (Varför?)

- Större förändringar

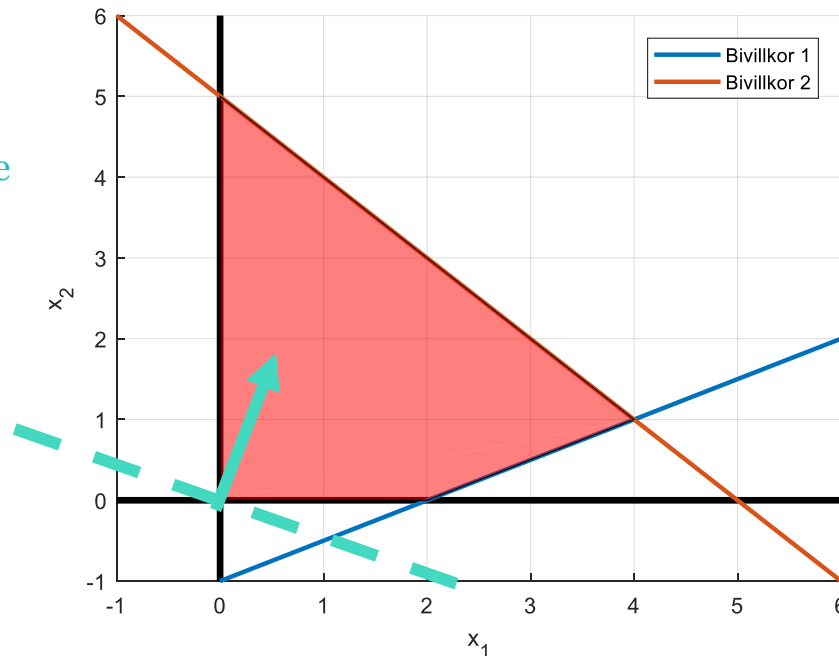
- Ny baslösning

$$\max z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\text{då } x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Målfunktionsförändring, ickebasvariabler

Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$z$	1	-2	-6			0
$s_1$		1	-2	1		2
$s_2$		1	1		1	5

Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$z$	1	4			6	30
$s_1$		3		1	2	12
$x_2$		1	1		1	5

- Målfunktionskoefficient för  $x_1: c_1 = 2$
- Vad händer om koefficienten förändras med  $\Delta c_1$  till  $c_1^{ny} = c_1 + \Delta c_1 = 2 + \Delta c_1$ ?

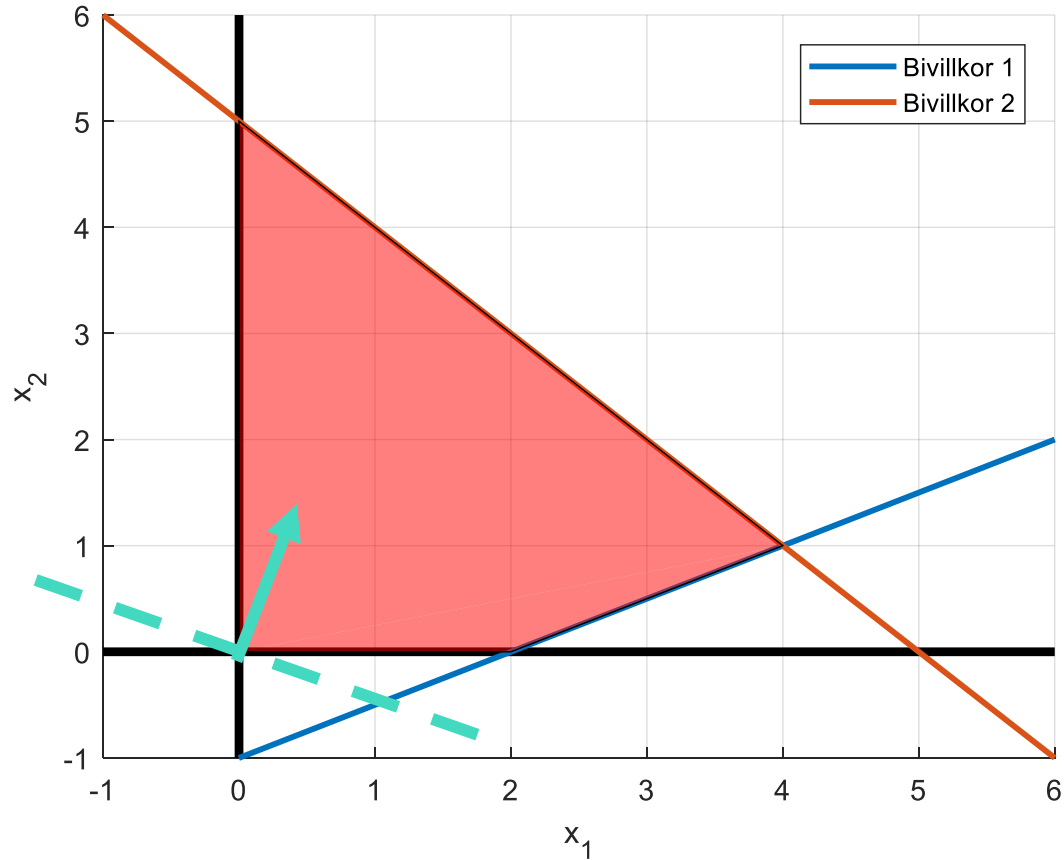
# Målfunktionsförändring, basvariabler

Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$z$	1	-2	-6			0
$s_1$		1	-2	1		2
$s_2$		1	1		1	5

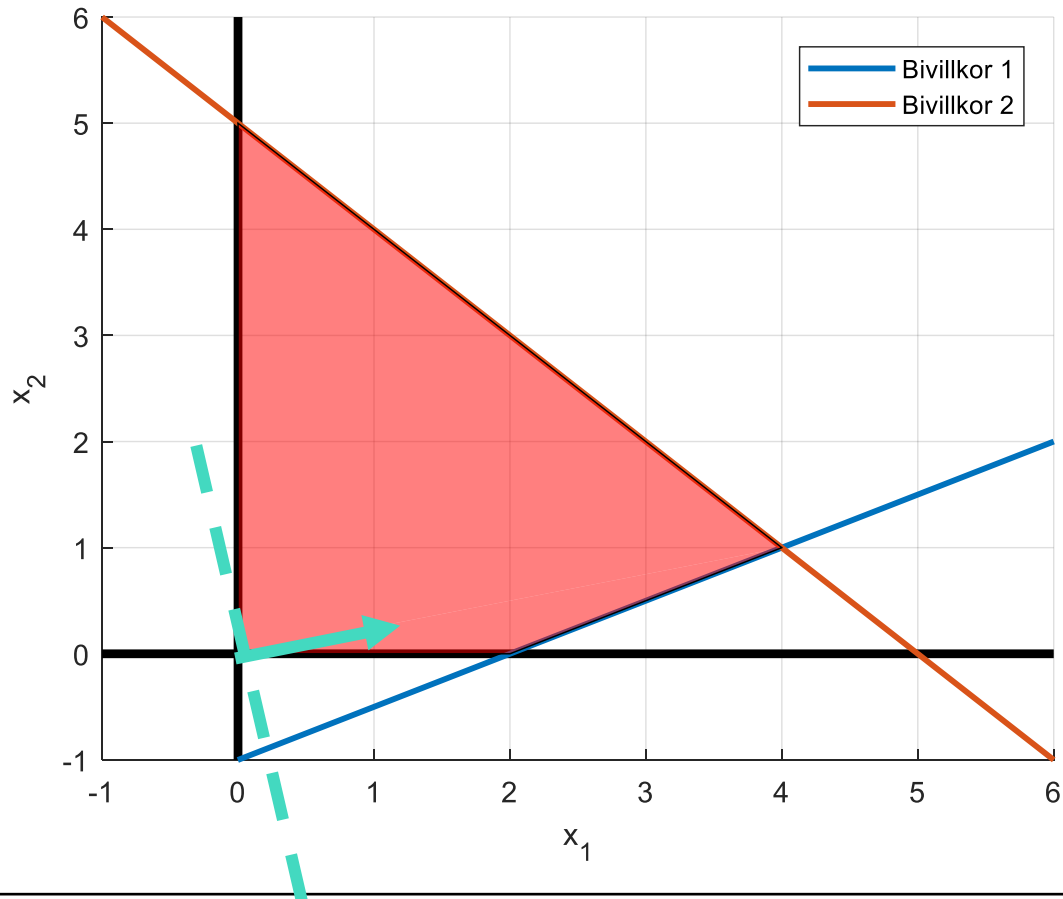
Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$z$	1	4			6	30
$s_1$		3		1	2	12
$x_2$		1	1		1	5

- Målfunktionskoefficient för  $x_2: c_2 = 6$
- Vad händer om koefficienten förändras med  $\Delta c_2$  till  $c_2^{ny} = c_2 + \Delta c_2 = 6 + \Delta c_2$ ?

# Målfunktionsförändring



# Målfunktionsförändring



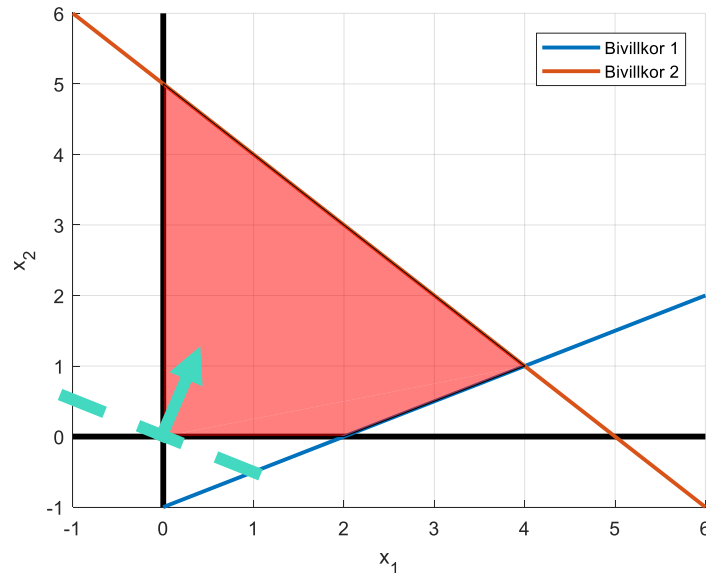
# Känslighetsanalys, begreppet skuggpris

- Skuggpris
  - Dualpris, dualvärde, marginalpris
  - Kopplas till villkor
  - Marginell förändring av målfunktionsvärde vid marginell ökning av resursen i bivillkor  $i$ 
    - ”Vad är en ytterligare enhet av en resurs värd”?
- Givet skuggpris gäller bara i visst intervall
  - Oförändrad baslösning
  - Oförändrade målfunktionskoefficienter



# Skuggpris, grafisk och tablåtolkning

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 6x_2 \\ \text{då} \quad x_1 - 2x_2 + s_1 &= 2 \\ & \quad x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\ & \quad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$



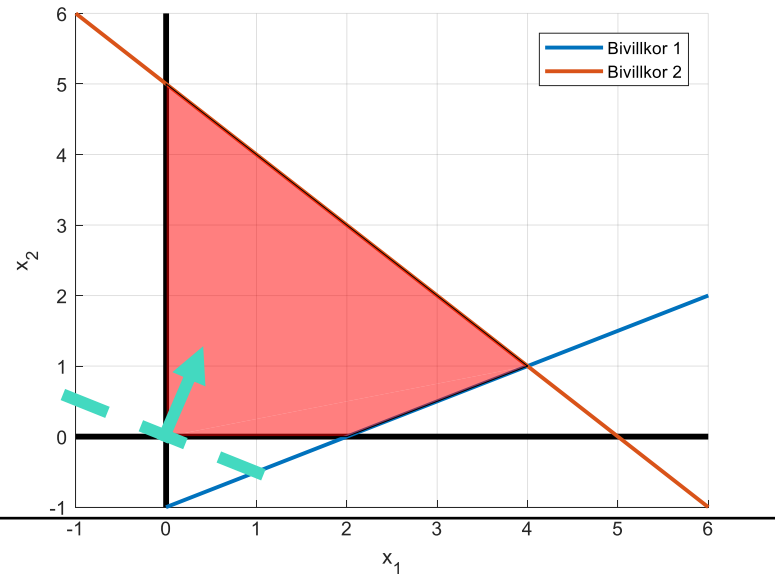
Basvar/var	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
z	1	-2	-6			0
$s_1$		1	-2	1		2
$s_2$		1	1		1	5

Basvar/var	z	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
z	1	4			6	30
$s_1$		3		1	2	12
$x_2$		1	1		1	5

# Skuggpris, grafisk och tablåtolkning

- Skuggpris: Vad är en enhet till av en resurs värd?
  - En till enhet biv. 1?
  - En till enhet biv. 2?
- Slutsats:
  - Skuggpriset kan avläsas i målfknraden, under slackvariablerna i optimaltablån.

Basvar/var	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$z$	1	4			6	30
$s_1$		3		1	2	12
$x_2$		1	1		1	5



# Grafisk tolkning, högerled

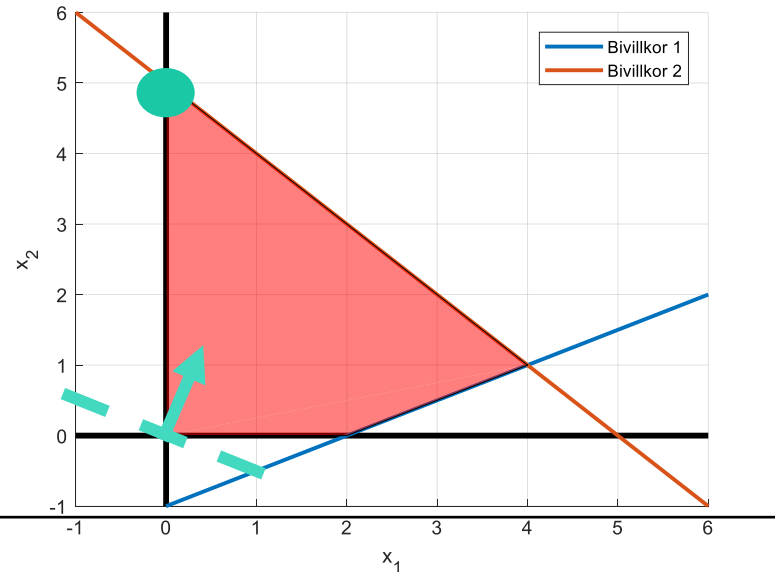
- Förändrat högerled
  - Förändrad placering villkor
- Små förändringar
  - Om aktivt bivillkor
    - Samma basuppsättning
      - Ny lösning
      - Nytt målfunktionsvärde
      - Konstant skuggpris
    - Om ej aktivt bivillkor
      - Ingen förändring
- Stora förändringar
  - Ev. ny basuppsättning
    - Ny lösning, målfunktionsvärde och skuggpris

$$\max z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\text{då } x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Grafisk tolkning, bivillkorskoefficient

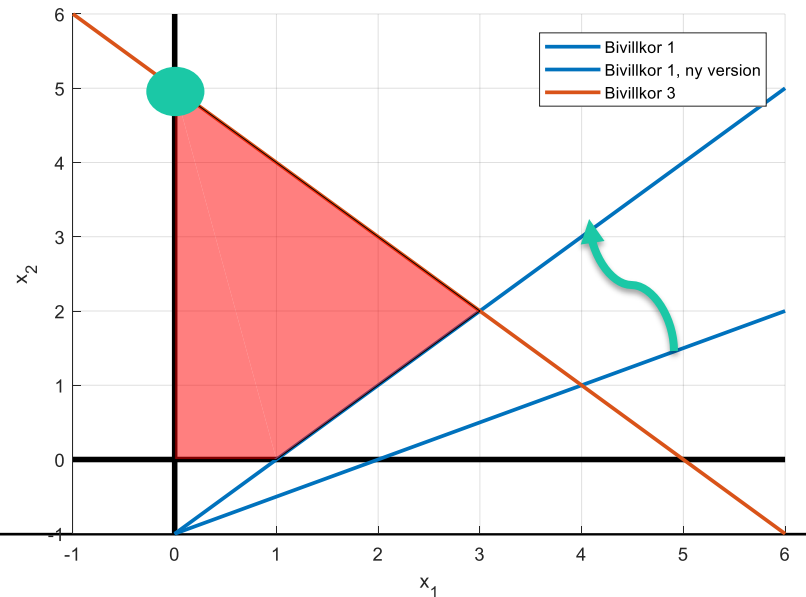
- Förändrad bivillkorskoefficient
  - Förändrad lutning bivillkor
- Små förändringar
  - Om aktivt bivillkor
    - Samma basuppsättning
      - Ny lösning
      - Nytt målfunktionsvärde
      - Konstant skuggpris
    - Om ej aktivt bivillkor
      - Ingen förändring
- Stora förändringar
  - Ev. ny basuppsättning
    - Ny lösning, målfunktionsvärde och skuggpris

$$\max z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\text{då } 2x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



## Förändringar högerled, bivillkorskoefficient, matematiskt

- Denna kurs: Principer viktiga, de matematiska detaljerna (lite) mindre viktiga
- Förändringar högerled & bivillkorskoefficient kräver algebra
  - Simplex på algebraisk form

# Förändring HL, koppling till skuggpris

- Relaxation
  - Förändring som (ev.) utökar tillåtna området
  - Optimal målfunktionsvärde kan inte försämrans
  - En förändring av högerledet som leder till att målfunktionsvärdet **förbättras** påverkar allt **mindre** ju större förändring som görs. Dvs. skuggpriset ger en övre gräns på förändringstakten (derivatan).

# Förändring HL, koppling till skuggpris

- Restriktion
  - Förändring som (ev.) minskar tillåtna området
  - Optimalt målfunktionsvärde kan inte förbättras
  - En förändring av högerledet som leder till att målfunktionsvärdet **försämras** påverkar allt **mer** ju större förändring som görs. Dvs. skuggpriset ger en undre gräns på förändringstakten (derivatan).

[www.liu.se](http://www.liu.se)