TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2014-10-31 - Lösningsskiss

1. a) Vi löser ekvationen $|x-4|+2x=|x|$ genom att studera tre fall.
   Fall 1: $x \leq 0$. Vi får ekvationen: $4-x+2x=-x \Leftrightarrow x=-2$, som duger ty $x=-2$ tillhör aktuellt intervall.
   Fall 2: $0 \leq x \leq 4$. Vi får ekvationen: $4-x+2x=x$, som saknar lösning
   Fall 3: $x \geq 4$. Vi får ekvationen: $x-4+2x=x \Leftrightarrow x=2$, som inte är lösning, ty $x=2$ tillhör inte det aktuella intervallet.

Svar: $x=-2$

b)

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 2x \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3}-2x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-2x(x+3)}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-5x-2}{x+3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+5x+2}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x+2)}{x+3} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in]-\infty,-3[\cup \left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

Svar: $x \in]-\infty,-3[\cup \left[-2,-\frac{1}{2}\right]$.

2. a) Vi har $|z_1|=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Alltså

$$z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Vi får

$$(z_1z_2)^{24}=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot 4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{24}=\left(\sqrt{2}\cdot 4\right)^{24}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{24}=2^{60}e^{i\frac{24\pi}{12}}=2^{60}e^{i2\pi}=2^{60}$$

Svar: 2^{60}

b) $|z-1|=1$ innebär alla z på cirkelranden till en cirkel med radie 1 och medelpunkt i $1+0i$, d.v.s. randen till cirkeln med ekvationen

$$(x-1)^2+y^2=1,$$

där $x=\operatorname{Re} z$ och $y=\operatorname{Im} z$. Om vi här sätter in det andra villkoret, d.v.s. $x=y$ får vi villkoret

$$(x-1)^2+x^2=1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x=1$$

Båda de angivna villkoren gäller därmed för $z=0$ och $z=1+i$.

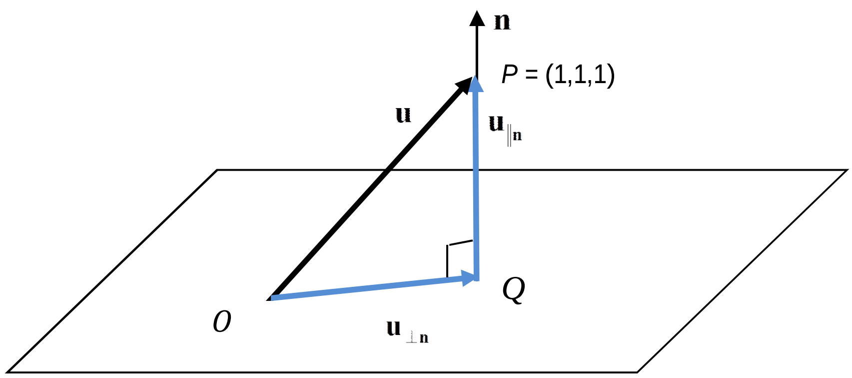
Svar: $z=0$ och $z=1+i$

c)

$$|w|=|1+\cos\alpha+i\sin\alpha|=\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$$

$$=\sqrt{1+2\cos\alpha+1}=\sqrt{2+2\cos\alpha}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|, \text{v.s.v.}$$

3. a) Vi konstaterar att origo, O, ligger i det givna planet, och ritar en figur med planets normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



a) Vi söker koordinaterna för punkten Q och bestämmer därför dess ortsvektor $\overrightarrow{OQ}$.
Vi har av figuren och projektionsformeln att

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{u}_{\perp\mathbf{n}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d.v.s. punkten $Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
Svar: $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

b) Det sökta avståndet ges av

$$|\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}| = \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ l.e.

4. a) Eftersom $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ så är $\sin\alpha < 0$. Med trigonometriska ettan får vi

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Vi har

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

Svar: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$

b) Se kursboken

c)

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin 2x \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{ty } \sin(t) \text{ är} \\ \text{en udda fkn}}} \sin(-2x) \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) \Leftrightarrow$$

$$2x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2x + n2\pi \text{ eller } 2x - \frac{\pi}{3} = -\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) + n2\pi$$

Här saknar den första ekvationen lösning i x, vilket gör att ekvationens lösningar skall uppfylla villkoret

$$2x-\frac{\pi}{3} = -\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) + n2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + n\cdot\frac{\pi}{2}$$

Svar: $x = -\frac{\pi}{24} + n\cdot\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

5. a) Termerna under rottecknet är alla definierade om $x \in]-\infty,3[\cap]-1,\infty[=]-1,3[$.
Dessutom måste x uppfylla olikheten

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(3-x) \geq \ln(x+1) \Leftrightarrow [\text{ty ln} - \text{funktionen är strängt växande}]$$

$$3 - x \geq x + 1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Alltså har vi

$$D_f =]-1,3[\cap]-\infty,1] =]-1,1]$$

Svar: $D_f =]-1,3[\cap]-\infty,1] =]-1,1]$

b)

$$y = \sqrt{\ln(3-x) - \ln(x+1)}\,, x \in]-1,1] \Leftrightarrow y^2 = \ln(3-x) - \ln(x+1)\,, x \in]-1,1], y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \ln\frac{3-x}{x+1}, x \in]-1,1], y \geq 0 \Leftrightarrow e^{y^2} = \frac{3-x}{x+1}, x \in]-1,1], y \geq 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

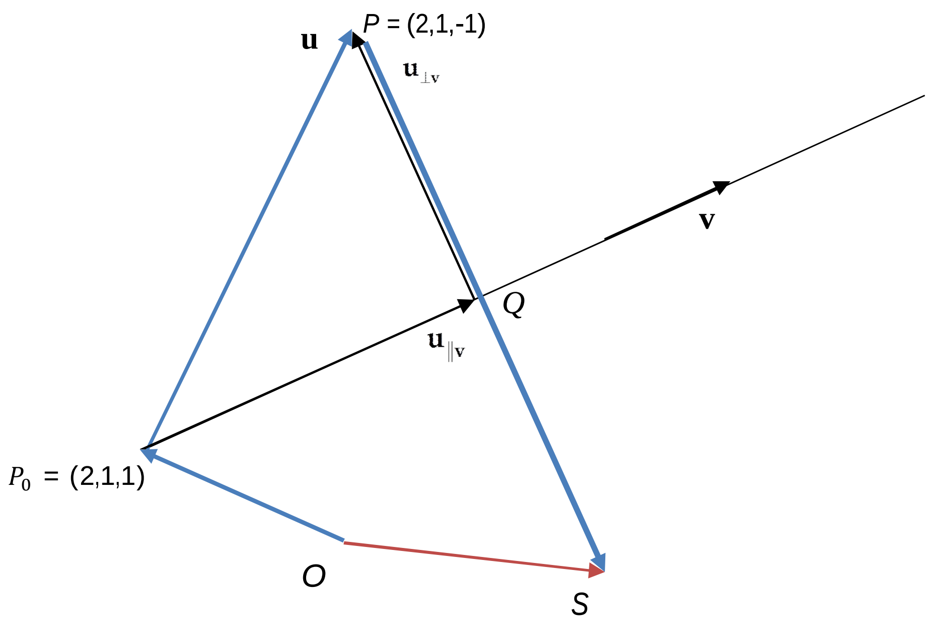
$$x = \frac{3 - e^{y^2}}{1 + e^{y^2}}, y \geq 0$$

Alltså har f invers med

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}, x \geq 0$$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{3-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}, x \geq 0$

6. Vi ritar först en figur.



Låt $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
Vi söker koordinaterna för punkten S och bestämmer först dess ortsvektor $\overrightarrow{OS}$. Av figuren har vi

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} - 2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}}) = \overrightarrow{OP_0} - \mathbf{u} + 2\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

vilket innebär att $S = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Kontroller kan göras på olika sätt, t.ex.

- kontrollera att $\overrightarrow{SP}$ är ortogonal mot linjens riktning (använd skalärprodukt)
- kontrollera att $|\overrightarrow{SQ}| = |\overrightarrow{QP}|$ (Q måste först bestämmas)

Svar: $S = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

7. Vi låter först $n = 1$. Vi får då

$$\text{VL}(1) = \sum_{k=1}^{1} (1 + tk)^2 = (1 + t)^2$$

medan

$$\text{HL}(1) = 12 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 1 = 25$$

Alltså måste t uppfylla villkoret

$$(1 + t)^2 = 25 \Leftrightarrow t = 4 \text{ eller } t = -6$$

För $t = 4$ får vi med $n = 2$:

$$\text{VL}(2) = \sum_{k=1}^{2} (1 + 4k)^2 = (1 + 4 \cdot 1)^2 + (1 + 4 \cdot 2)^2 = 25 + 81 = 106$$

medan

$$\text{HL}(2) = 12 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 + 2 = 96 + 48 + 2 = 146 \neq 106$$

Alltså gäller inte sambandet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = 4$.

För $t = -6$ får vi med $n = 2$:

$$\text{VL}(2) = \sum_{k=1}^{2} (1 - 6k)^2 = (1 - 6)^2 + (1 - 6 \cdot 2)^2 = 25 + 121 = 146$$

Alltså gäller sambandet för $n = 1$ och $n = 2$ om $t = -6$.

Vi visar nu med induktion att sambandet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = -6$.

Steg I: Vi vet enligt ovan att sambandet gäller för $n = 1$ (och $n = 2$).

Steg II: Antag att sambandet gäller för ett godtyckligt fixt $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

$$\text{VL}(p) = \sum_{k=1}^{p} (1 - 6k)^2 = 12p^3 + 12p^2 + p = \text{HL}(p)$$

Detta medför att

$$\text{VL}(p + 1) = \sum_{k=1}^{p+1} (1 - 6k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} (1 - 6k)^2\right) + \underbrace{(1 - 6(p + 1))^2}_{=(-6p-5)^2} = [\text{enligt antagandet}] =$$

$$= 12p^3 + 12p^2 + p + (-6p - 5)^2 = 12p^3 + 12p^2 + p + 36p^2 + 60p + 25 = 12p^3 + 48p^2 + 61p + 25$$

Vi har också

$$\text{HL}(p + 1) = 12(p + 1)^3 + 12(p + 1)^2 + (p + 1) = 12(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) + 12(p^2 + 2p + 1) + p + 1 =$$

$$= 12p^3 + 48p^2 + 61p + 25$$

Därmed har vi visat att om $\text{VL}(p) = \text{HL}(p)$ så gäller det att $\text{VL}(p + 1) = \text{HL}(p + 1)$

Steg III

Påståendet gäller enligt Steg I för $n = 1$. Enligt Steg II gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = -6$ v.s.v.

Svar: Sambandet gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$ om $t = -6$.