TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2015-01-07 - Lösningsskiss

1. a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \iff$ [Låt $t = \sin x$] $\iff 2t^2 - 3t + 1 = 0 \iff t = 1$ eller $t = \frac{1}{2}$

$t = 1$ ger oss villkoret $\sin x = 1, x \in [0,\pi] \iff x = \dfrac{\pi}{2}$

$t = \dfrac{1}{2}$ ger oss villkoret $\sin x = \dfrac{1}{2}, x \in [0,\pi] \iff x = \dfrac{\pi}{6}$ eller $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Svar: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}$ eller $x = \frac{5\pi}{6}$

b) Funktionen är definierad om

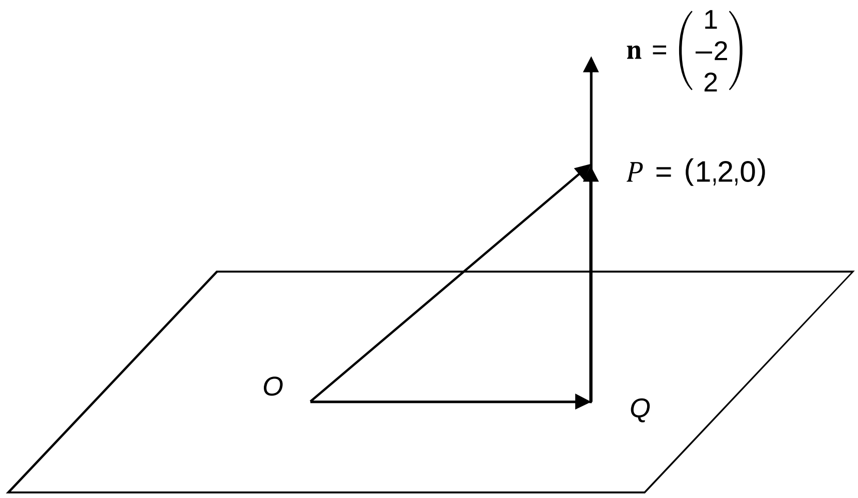
$$-1 \leq 2x \leq 1 \text{ och } -1 \leq x - 1 \leq 1 \iff x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap [0,2] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Svar: Funktionen är definierad för $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. a) Linjen och planet har en gemensampunkt om $(1 + t) - 2(0 + t) + 2(1 - t) = 0 \iff t = 1$, vilket ger skärningspunkten $(1 + 1, 0 + 1, 1 - 1) = (2,1,0)$

Svar: Skärningspunkten är (2,1,0)

b) Vi konstaterar att origo, *O*, ligger i det givna planet, och ritar en figur (skiss) där vi har planets normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Vi söker avståndet mellan Q och P, d.v.s. $|\overrightarrow{QP}|$. Om vi låter $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ får vi

$$|\overrightarrow{QP}| = |\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}|$$

Vi har av projektionsformeln att

$$\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \cdots = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Så sökt avstånd är

$$\left| -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3}\sqrt{1 + 4 + 4} = \frac{1}{3}\sqrt{9} = 1 \text{ l.e.}$$

Svar: 1 l. e.

3. a) För att lösa ekvationen skriver vi om funktionen $f(x) = |x| - |1 - 2x| - 3x$ i tre relevanta fall:

Fall 1: $x \leq 0$. Vi får $f(x) = -x - (1 - 2x) - 3x = -2x - 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$, som duger.

Fall 2: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. $f(x) = x - (1 - 2x) - 3x = -1 = 0$, som saknar lösning.

Fall 3: $x \geq \frac{1}{2}$. $f(x) = x - (2x - 1) - 3x = -4x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4}$, som ligger utanför det aktuella intervallet.

Svar: $x = -\dfrac{1}{2}$

b) Eftersom f enligt ovan är konstant i intervallet $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ så saknar f invers.
Svar: f saknar invers.

4. a)

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x-1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)-x(x-1)}{2x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^2+3x-2}{2x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{2x} \geq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in]0,1] \cup [2,\infty[$.
Svar: $x \in]0,1] \cup [2,\infty[$.

b) Med Re $z = x$ och Im z $= y$ får vi

$$|z-3| \geq |z-2i| \Leftrightarrow |x+iy-3| \geq |x+iy-2i| \Leftrightarrow |(x-3)+iy| \geq |x+i(y-2)| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \geq \sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2 \geq x^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow -6x+9 \geq -4y+4 \Leftrightarrow$$

$y \geq \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z \geq \frac{3}{2}\operatorname{Re} z - \frac{5}{4}$
Svar: Alla komplexa tal z för vilket det gäller att $\operatorname{Im} z \geq \frac{3}{2}\operatorname{Re} z - \frac{5}{4}$

5. a) Ekvationens termer är alla definierade om $x \in]-\infty,6[\cap]0,\infty[=]0,6[= D_{\text{ekv}}$
Alltså:

$$\ln(6-x) - 2\ln x = \ln 2, x \in]0,6[\Leftrightarrow$$

$$\ln(6-x) = 2\ln x + \ln 2, x \in]0,6[\Leftrightarrow$$

$$\ln(6-x) = \ln 2x^2, x \in]0,6[\Leftrightarrow$$

$$6-x = 2x^2, x \in]0,6[\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Anm: Roten $x = -2$ duger inte ty $-2 \notin D_{\text{ekv}}$.
Svar: $x = \frac{3}{2}$

b)

$$e^{3x} - 5e^{2x} - 14e^x = 0 \Leftrightarrow [\text{Låt } t = e^x > 0] \Leftrightarrow t^3 - 5t^2 - 14t = 0, t > 0 \Leftrightarrow$$

$$t(t^2-5t-14) = 0, t > 0 \Leftrightarrow t = 7$$

Alltså har vi $7 = e^x \Leftrightarrow x = \ln 7$
Svar: $x = \ln 7$

6. Vi skall visa att påståendet $P(p)$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{4}{(k-1)\cdot k \cdot (k+1)} = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)}$$

gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$.

Bevismetod: Induktion

Steg I

$$V(2) = \sum_{k=2}^{2} \frac{4}{(k-1)\cdot k\cdot (k+1)} = \frac{4}{(2-1)\cdot 2\cdot (2+1)} = \frac{2}{3}$$

$$H(2) = \frac{2^2+2-2}{2(2+1)} = \frac{2}{3}$$

Alltså har vi $V(2) = H(2)$, d.v.s. $P(2)$ gäller.

Steg II

Vi antar att $P(p)$ gäller för ett godtyckligt $p \in \mathbb{Z}^+, p \geq 2$, d.v.s. vi antar att

$$\sum_{k=2}^{p} \frac{4}{(k-1)\cdot k\cdot (k+1)} = \frac{p^2+p-2}{p(p+1)},$$

vilket leder till att

$$V(p+1) = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{4}{(k-1)\cdot k\cdot (k+1)} = \left(\sum_{k=2}^{p} \frac{4}{(k-1)\cdot k\cdot (k+1)}\right) + \frac{4}{((p+1)-1)\cdot (p+1)\cdot ((p+1)+1)} \overset{*}{\underset{}{=}}$$

$$\frac{p^2+p-2}{p(p+1)} + \frac{4}{p(p+1)(p+2)} = \frac{(p+2)(p^2+p-2)+4}{p(p+1)(p+2)} = \frac{p^3+3p^2}{p(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+3p}{(p+1)(p+2)},$$

och

$$H(p+1) = \frac{(p+1)^2+(p+1)-2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+3p}{(p+1)(p+2)}$$

Alltså $V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$ d.v.s. om $P(p)$ gäller så gäller även $P(p+1)$.

Steg III

Påståendet gäller enligt I för $n = 2$. Enligt II gäller det då även för $n = 2+1 = 3$. Då gäller det även för $n = 3+1 = 4$ o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$, v.s.v.

7. a) Linjens ekvation på parameterform kan allmänt skrivas $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Om vi ut detta systems respektive villkor löser ut parametern t får vi

$$t = \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}, \text{v.s.v.}$$

b) Om $\alpha = 0$ får vi motsvarande villkor

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{\beta} = \dfrac{z-z_0}{\gamma} \end{cases}$$

c) Linjen

$$2x = y = z \Leftrightarrow \frac{x-0}{1/2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

och kan därför på parameterform skrivas

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Alltså har linjen riktningen $\mathbf{v} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Linjen skär planet under vinkeln $\pi/6$, vilket innebär att vinkeln mellan linjen och planets normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ är $\pi/3$. Alltså har vi

$$\frac{1}{2} = \cos(\pi/3) = \frac{\pm\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\k\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{9}\sqrt{1+k^2}} = \frac{\pm(1+2k)}{3\sqrt{1+k^2}} \Leftrightarrow \pm 2(1+2k) = 3\sqrt{1+k^2} \Rightarrow$$

$$4(1+4k+4k^2) = 9(1+k^2) \Leftrightarrow k = \frac{-8\pm 3\sqrt{11}}{7}$$

Prövning visar att båda dessa värden på k är lösningar.

Svar: $k = \frac{-8\pm 3\sqrt{11}}{7}$