Svar till tenta i analys III, TNA006, 160105

1. (a) f växer snabbast i gradientens riktning $\nabla f = (e^{x/y}, e^{x/y} - \frac{x}{y}e^{x/y})$. Och $\nabla f(-1,1) = e^{-1}(1,2)$

   Svar: f växer snabbast i riktningen $(1,2)$.

   (b) Normerade riktningen är, $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)$ Riktningsderivatan blir då

   $$f'_{\mathbf{v}}(-1,1) = \nabla f(-1,1) \cdot \mathbf{v} = \frac{e^{-1}}{\sqrt{13}}(1,2)\cdot(2,-3) = -\frac{4e^{-1}}{\sqrt{13}}$$

   Svar: Riktningsderivatan är $-\frac{4}{e\sqrt{13}}$

2. För att de skall tangera så måste normalerna vara parallella dvs $(1,1,1) \parallel (2x,2y,-2z)$. Det innebär att $\lambda(1,1,1) = (2x,2y,-2z)$, det gäller endast då $x = y = -z$. Punkter där planet kan vara parallellt är punkter där $(x,y,z) = t(1,1,-1)$. Punkten måste också ligga på hyperboloiden så $t^2+t^2-t^2 = 1$vilket ger att $t = \pm 1$. Punkter där planet kan tangera ytan är då $\pm(1,1,-1)$. För $(1,1,-1)$ så får vi ur planets ekvation att $d = 1$, för $(-1,-1,1)$ så får vi ur planets ekvation att $d = -1$.

   Svar: För $d = \pm 1$ så tangerar planet hyperboloiden.

3. Området kan beskrivas som $D = \{(x,y) : (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 16\}$. En cirkelskiva med centrum i $(2,-3)$ med radie 4. Byter till polära koordinater $x = 2 + r\cos\theta$, $y = -3 + r\sin\theta$, Jacobianen blir r, området beskrivs av att $0 < r < 4$ och $0 < \theta < 2\pi$.

   $$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (2 + r\cos\theta)(-3 + r\sin\theta) r d\theta \right) dr =$$

   $$\int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (-6 + 2r\sin\theta - 3r\cos\theta + r^2\sin\theta\cos\theta) r d\theta \right) dr =$$

   $$\int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} -6r d\theta \right) dr = 2\pi \left[3r^2 \right]_0^4 = 96\pi.$$

   Svar: $\iint_D xy\,dxdy = 96\pi$.

4. Låt $F(x,y,z) = \cos z - xy - xz$ då är $F'_z = -\sin z - x$ och $F'_z(1,1,0) = 1 \neq 0$ alltså definierar ekvationen z som en $\mathcal{C}^1$-funktion av x och y.

   Vi behöver bestämma alla derivator av z upp t.o.m. ordning två.

   Vi ser direkt att $z(1,1) = 0$.

För att bestämma z'_x deriverar vi implicit map x och får:

$$-z'_x \sin z = y + z + xz'_x \quad \Rightarrow \quad \text{i punkten (1,1,0) } 0 = 1 + z'_x(1,1).$$

Vi får att $z'_x(1,1) = -1$.

För z''_{xx} deriverar vi uttrycket vi fick ovan en gång till implicit på x:

$$-z''_{xx} \sin z - (z'_x)^2 \cos z = 2z'_x + xz''_{xx} \quad \Rightarrow \quad \text{i punkten (1,1,0) } -1 = -2 + z''_{xx}(1,1).$$

Vi får att $z''_{xx}(1,1) = 1$.

För att bestämma z'_y deriverar vi implicit map y och får:

$$-z'_y \sin z = x + xz'_y \quad \Rightarrow \quad \text{i punkten (1,1,0) } 0 = 1 + z'_y(1,1).$$

Vi får att $z'_y(1,1) = -1$.

För z''_{yy} deriverar vi uttrycket vi fick ovan en gång till implicit på y:

$$-z''_{yy} \sin z - (z'_y)^2 \cos z = xz''_{yy} \quad \Rightarrow \quad \text{i punkten (1,1,0) } -1 = z''_{yy}(1,1).$$

Vi får att $z''_{yy}(1,1) = -1$.

För z''_{xy} deriverar vi uttrycket vi fick i z'_x en gång till implicit på y:

$$-z''_{xy} \sin z - z'_x z'_y \cos z = 1 + z'_y + xz''_{xy} \quad \Rightarrow \quad \text{i punkten (1,1,0) } -1 = z''_{xy}(1,1).$$

Vi får att $z''_{xy}(1,1) = -1$.

Svar: $p_2(x,y) = -(x-1)-(y-1)+\frac{1}{2}\big((x-1)^2-2(x-1)(y-1)-(y-1)^2\big)$

5. Vi integrerar som:

$$\iiint_D (y-1)dxdydz = \int_0^3 (\iint_{D_y} (y-1)dxdz)dy =$$

där D_y är en cirkelskiva i xz-planet med radie $\sqrt{4-(y-1)^2}$ och centrum i origo.

$$\int_0^3 \pi(y-1)(4-(y-1)^2)dy = \pi\left[2(y-1)^2 - \frac{(y-1)^4}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{4}.$$

Svar: $\iiint_D (y-1)dxdydz = \frac{9}{4}$

6. Området är obegränsat, vi kan dela in första kvadranten i två delar $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ och $E = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \geq 1\}$.

   På mängden D är $f \geq 0$ på E är $f \leq 0$ om vi är intresserade av det största värde f antar räcker det alltså att se på mängden D.

   Då har vi att f är kontinuerlig och D är kompakt, således antas det största värdet på D.

   Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x &= x^2y^2(3(1-x-y)-x) = x^2y^2(3-4x-3y) \\ f'_y &= x^3y(2(1-x-y)-y) = x^3y(2-2x-3y) \end{cases}$$

   Lösningar till ekvationen $\nabla f = \mathbf{0}$ är $(0, y)$, $(x, 0)$ och $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

   Singulära punkter: Finns inga då ∇f finns i hela $\mathbb{R}^2$.

   Randen: Består av tre linjestycken,

   $x = 0$ och $0 \leq y \leq 1$. Här är f konstant 0.

   $y = 0$ och $0 \leq x \leq 1$. Här är f konstant 0.

   $x + y = 1$ och $0 \leq x \leq 1$. Här är f konstant 0.

   Sammanfattning: Det största värdet f antar finns bland följande funktionsvärden:

$$f(0, y) = 0, \quad f(x, 0) = 0, \quad f(x, 1-y) = 0, \quad f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{8}\frac{1}{9}\frac{1}{6} = \frac{1}{432}$$

   Svar: Det största värdet f antar i första kvadranten är $\frac{1}{432}$.

7. Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u + z'_v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = az'_u + bz'_v.$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial(z'_u + z'_v)}{\partial x} = \frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}.$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial z'_x}{\partial y} = \frac{\partial(z'_u + z'_v)}{\partial y} = \frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= az''_{uu} + (a+b)z''_{uv} + bz''_{vv}.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial z'_y}{\partial y} = \frac{\partial (az'_u + bz'_v)}{\partial y} = a\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= a^2 z''_{uu} + 2abz''_{uv} + b^2 z''_{vv}.$$

Detta ger oss för VL i PDEn

$$6z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} = 6(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}) + az''_{uu} + (a+b)z''_{uv} + bz''_{vv} - (a^2 z''_{uu} + 2abz''_{uv} + b^2 z''_{vv}) =$$

$$\big(6 + a - a^2\big)z''_{uu} + \big(12 + a + b - 2ab\big)z''_{uv} + \big(6 + b - b^2\big)z''_{vv}$$

Vi skall välja a och b så att detta blir enkelt, vi ser att vi bör välja så att

$$6 + a - a^2 = 0 \quad \text{och} \quad 6 + b - b^2 = 0.$$

Lösningar är $a = -2$ eller $a = 3$. För b får vi också lösningar -2, 3. Vi kan välja $a = -2$ och $b = 3$. (Det går också bra med $a = 3$ och $b = -2$). Variabelbytet är $u = x - 2y$, $v = x + 3y$, då är $5y = v - u$.

PDEn blir då:

$$25z''_{uv} = 95y = 19(v-u) \;\Rightarrow\; z''_{uv} = \frac{19}{25}\big(v-u\big) \;\Rightarrow\; z'_u = \frac{19}{25}\big(\frac{v^2}{2} - uv\big) + h(u) \;\Rightarrow$$

$$z = \frac{19}{25}\frac{uv^2 - u^2 v}{2} + H(u) + g(v).$$

Svar: Lösningarna är $z(x,y) = \frac{19}{10}\big(y(x-2y)(x+3y)\big) + H(x-2y) + g(x+3y)$, där H och g är godtyckliga funktioner.