TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2016-08-24
Lösningsskiss

1. a) Se kursboken.

b) $2\sin^2 x + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

/sätt $t = \sin x$/ $\Leftrightarrow t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2$ eller $t = \frac{1}{2}$.

För $t = -2$ har vi ekvationen $\sin x = -2$, som saknar lösning.

För $t = \frac{1}{2}$ har vi ekvationen $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$

Svar: $x = x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. a) $f(x) = \ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1)$ är definierad om $x^2 - 4 > 0$ och $x - 1 > 0$.

Vi har $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$,

och $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]1, \infty[$

Båda olikheterna är alltså uppfyllda omm $x \in]2, \infty[$.

Svar: $D_f =]2, \infty[$

b) $f(x) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1) = \ln 6$.

Enligt ovan är ekvationens vänstra led definierat omm $x > 2$.

Vi har

$$\ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left((x^2 - 4)(x - 1)\right) = \ln 6 \Leftrightarrow$$
$$\text{/ ty ln - funktionen är omvändbar/} \Leftrightarrow$$
$$(x^2 - 4)(x - 1) = 6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Eftersom $x = -1$ är ett nollställe till denna ekvation får vi, via faktorsatsen och polynomdivision, att ekvationen är ekvivalent med

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = -1 \text{ eller } x = 1 + \sqrt{3} \text{ eller } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Men $x = -1 < 2$ och $x = 1 - \sqrt{3} < 1 - 1 = 0 < 2$. Däremot har vi $1 + \sqrt{3} > 1 + 1 = 2$ så $x = 1 + \sqrt{3}$ är lösning.

Svar: $x = 1 + \sqrt{3}$

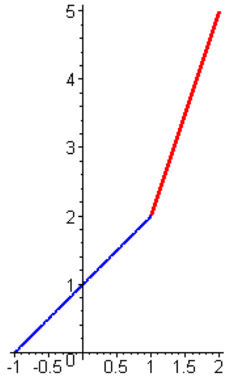
3. a) $2f(x) = 3$ motsvarar ekvationen $2|x - 1| + 4x = 3$

Eftersom $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ om } x \geq 1 \\ 1 - x \text{ om } x \leq 1 \end{cases}$ får vi två olika fall, som sammanställs i följande tabell:

$I_1: \quad -1 \le x \le 1$	$I_2: \quad 1 \le x \le 2$
$2(1-x)+4x=3 \Leftrightarrow 2-2x+4x=3 \Leftrightarrow$ $2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \in I_1$, så $x=\frac{1}{2}$ är en lösning.	$2(x-1)+4x=3 \Leftrightarrow 2x-2+4x=3 \Leftrightarrow$ $6x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{6} \notin I_2$, så ekvationen saknar lösning i detta intervall.

Svar: $x=\frac{1}{2}$

b) Vi har $f(x)=|x-1|+2x=\begin{cases} 1-x+2x=x+1 & \text{om } -1 \le x \le 1 \\ x-1+2x=3x-1 & \text{om } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Vi ritar grafen i respektive intervall:



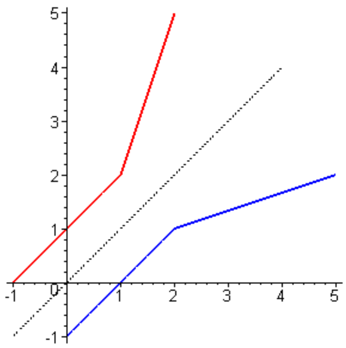
c) För $-1 \le x \le 1$ har vi $f(x)=y=x+1 \Leftrightarrow x=y-1$. Eftersom f är strängt växande har vi här att $y \in [-1+1, 1+1]=[0,2]$, d.v.s. på detta intervall har f invers med $f^{-1}(x)=x-1, D_{f^{-1}}=[0,2]$.

För $1 \le x \le 2$ har vi $f(x)=y=3x-1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{3}$. Eftersom f är strängt växande har vi här att $y \in [3\cdot 1-1, 3\cdot 2-1]=[2,5]$, d.v.s. på detta intervall har f invers med $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}, D_{f^{-1}}=[2,5]$

Vi observerar att $f^{-1}(2)=1$ i båda fallen och därmed har vi $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1 & \text{om } 0 \le x \le 2 \\ \frac{x+1}{3} & \text{om } 2 < x \le 5 \end{cases}$.

Svar: $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1 & \text{om } 0 \le x \le 2 \\ \frac{x+1}{3} & \text{om } 2 < x \le 5 \end{cases}$

Anm: Som kontroll till c)-uppgiften ritar vi graferna $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ och $y=x$ i samma koordinatsystem.



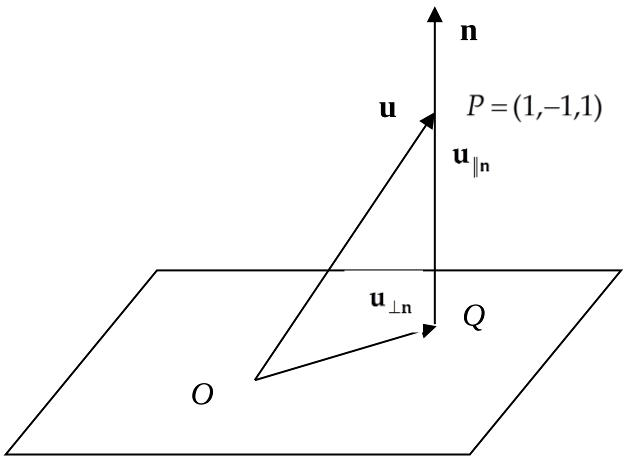
4. a) Linjens ekvation insatt i planets ger

$$1-(-1-t)+2(1+t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}$$

som insatt i linjens ekvation ger skärningspunkten $\left(1,-1+\frac{4}{3},1-\frac{4}{3}\right)=\left(1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Svar: Skärningspunkten = $\left(1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

b) Skiss.



Låt Q vara den ortogonala projektionen av punkten P på planet. Eftersom origo ligger i planet låter vi $\mathbf{u}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Figuren ger oss att $\overrightarrow{OQ}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}$, där vi av projektionsformeln har att

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Alltså,

$$\overrightarrow{OQ}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{n}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

d.v.s.

$$Q=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Svar: Punkten $Q=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ är den ortogonala projektionen av P på planet.

5. a) Med $z=\sqrt{3}+i$ har vi $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$. Om $\arg z=v$ har vi (t.ex.) $\tan v=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow v=\frac{\pi}{6}$, så vi kan välja $\arg z=\frac{\pi}{6}$ (eller vilken som helst av $\frac{\pi}{6}+n2\pi,\ n\in\mathbf{Z}$).

Svar: $|z| = 2$, $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$

b) $z^{15} = (\sqrt{3} + i)^{15} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{15} = 2^{15}e^{i\frac{15\pi}{6}} = 2^{15}e^{i\left(\frac{12\pi+3\pi}{6}\right)} = 2^{15}e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = 2^{15}\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} = 2^{15}i$

Svar: $z^{15} = 2^{15}i$

c) Låt $u = x + iy \Rightarrow$

$|u - z| = 2|u - i| \Leftrightarrow \left|x + iy - (\sqrt{3} + i)\right| = 2|x + iy - i| \Leftrightarrow \left|(x - \sqrt{3}) + (y-1)i\right| = 2|x + (y-1)i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 4\left(x^2 + (y-1)^2\right) \Leftrightarrow$

$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 4x^2 + 3(y-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 3(y-1)^2 = 3 \Leftrightarrow$

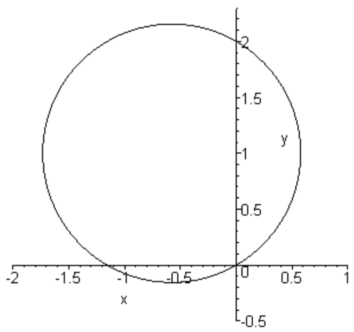
$x^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \dfrac{3}{9} + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$,

vilket motsvarar en cirkel med medelpunkt i $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ och radie $\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$u = 0$ ger ekvationens VL $= |0 - z| = |-z| = |z| = 2$, och dess
HL $= 2|0 - i| = 2|-i| = 2|i| = 2 \cdot 1 = 2$, d.v.s. $u = 0$ uppfyller ekvationen.

Svar: Alla komplexa tal i det komplexa talplanet som ligger på en cirkel med medelpunkt i $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ och radie $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, d.v.s. alla komplexa tal u som uppfyller villkoret $\left|u - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3} + i\right)\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (se figur).

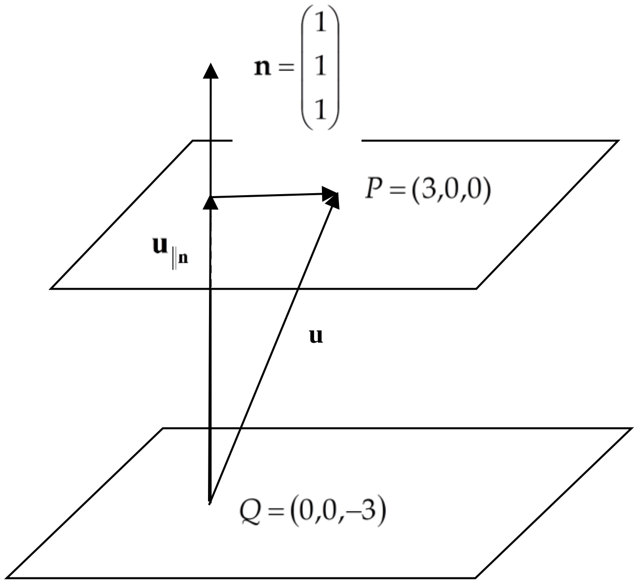


6. a) Planet $x + y + z = 3$ har en normalvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och

$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ är parallella med det andra planet och är sinsemellan ickeparallella. Dessa vektorer spänner alltså upp det andra planet. $\mathbf{n}$ är vinkelrät mot både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, ty

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$ och $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=0$. Det innebär att de båda planen har parallella normalvektorer, vilket innebär att planen är parallella, v.s.v.

b) Eftersom planen är parallella kan vi välja $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ som normal till båda planen. Vi bestämmer en godtycklig punkt i vardera planet, och väljer $P=(3,0,0)$ i det förra planet och $Q=(0,0,-3)$ i det senare, se figur.



Låt $\mathbf{u}=\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$.

Det sökta avståndet mellan planen ges av $\left|\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}\right|$. Projektionsformeln ger oss

$$\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)\mathbf{n}=\frac{\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{3+0+3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Det sökta avståndet mellan planen är alltså $\left|\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}\right|=2\sqrt{3}$ l.e.

Svar: $2\sqrt{3}$

7. Vi ska bevisa att P(n): V(n) = $\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}=\frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$ gäller för alla $n\in Z^+$

Vi väljer ett induktionsbevis:

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = \sum_{k=1}^{1} aq^{1-1} = aq^0 = a$, $H(1) = \dfrac{a\left(1-q^1\right)}{1-q} = a$

Alltså $V(1) = H(1)$ d. v. s. $P(1)$ gäller.

STEG 2: Vi antar att P(p) gäller för godtyckligt fixt tal $p \in \mathbf{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

$$V(p) = \sum_{k=1}^{p} aq^{k-1} = \frac{a\left(1-q^p\right)}{1-q}$$

Detta medför att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} aq^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} aq^{k-1} + aq^{(p+1)-1} = /\,\text{enligt antagandet}\,/ =$$

$$= \frac{a\left(1-q^p\right)}{1-q} + aq^p = \frac{a\left(1-q^p\right) + aq^p(1-q)}{1-q} = \frac{a - aq^p + aq^p - aq^{p+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{a\left(1-q^{p+1}\right)}{1-q} = H(p+1)$$

d.v.s. $V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$

STEG 3 Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$. Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla $n \in \mathbf{Z}^+$, v.s.v.