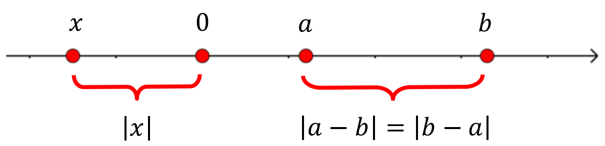
TNA001 - FÖ 4 Kap 1.5, fr.o.m. sid. 33 (absolutbelopp), Kap 1.6, t.o.m. sid. 42 (Summor)

1.5 Absolutbelopp

Definition: $|x| = \begin{cases} x \text{ om } x \geq 0 \\ -x \text{ om } x \leq 0 \end{cases}$ ($|x|$ läses ”absolutbeloppet av x ”)

Geometrisk tolkning: $|x|$ tolkas som avståndet mellan punkterna x och 0 på tallinjen.
$|a-b|$ betyder avståndet mellan punkterna a och b.



Observera att $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exempel 16

Definitionen ger

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 \text{ om } x-5 \geq 0, \text{d.v.s. om } x \geq 5 \\ -(x-5) \text{ om } x-5 \leq 0, \text{ d.v.s. om } x \leq 5 \end{cases}$$

Ekvationen $|x-5| = 3$ har alltså lösningarna $x-5=3 \Leftrightarrow x=8$ för $x \geq 5$ samt $-(x-5) = 3 \Leftrightarrow -x+5=3 \Leftrightarrow x=2$ för $x \leq 5$.

Exempel 17

$|7| = 7$

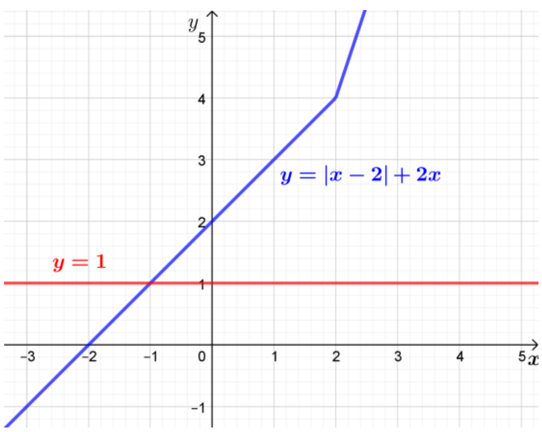
$|-3| = 3$

Observera att $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

Exempel 18

$|2(-3)-4| = |-6-4| = |-10| = 10$

Exempel 19
Lös ekvationen $|x-2|+2x=1$.



Exempel 20

a) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller olikheten $|x-5| + x \leq 7$.

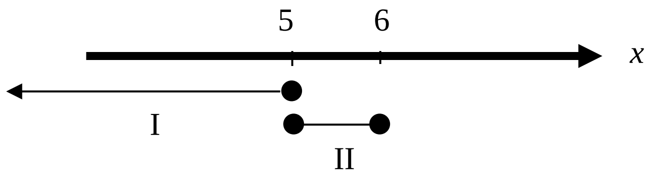
Lösning:

$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{om} \quad x \geq 5 \\ -(x-5) & \text{om} \quad x \leq 5 \end{cases}$ och vi får två fall:

I_1 $\quad x \leq 5$	I_2 $\quad x \geq 5$
$-(x-5) + x \leq 7 \Leftrightarrow 5 \leq 7$, vilket är sant för alla x, och speciellt för alla x i det aktuella intervallet, d.v.s. för $x \leq 5$. Vi kan även skriva detta som $L_1 =]-\infty, 5] \cap]-\infty, \infty[=]-\infty, 5]$.	$x - 5 + x \leq 7 \Leftrightarrow 2x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 6$, men vi har att $x \geq 5$, vilket innebär att olikheten gäller för $5 \leq x \leq 6$ i detta intervall. Detta kan skrivas som $L_2 = [5, \infty[\cap]-\infty, 6] = [5,6]$.

Den totala lösningsmängden blir då $L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 6]$ (Se figuren nedan)

Svar: Olikheten gäller för $x \leq 6$.



b) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller olikheten $|x-1| > 2|x-2|$

Lösning:

Vi får **tre fall** (erhålls lämpligen på motsvarande sätt som i a) ovan):

I_1 $\quad x \leq 1$	I_2 $\quad 1 \leq x \leq 2$	I_3 $\quad x \geq 2$
$-(x-1) > 2\big(-(x-2)\big)$ $\Leftrightarrow -x + 1 > -2x + 4$ $\Leftrightarrow x > 3$ Detta ger lösningsmängden $L_1 =]-\infty, 1] \cap]3, \infty[= \emptyset$.	$x - 1 > 2\big(-(x-2)\big)$ $\Leftrightarrow x - 1 > -2x + 4$ $\Leftrightarrow 3x > 5$ $\Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ Detta ger lösningsmängden $L_2 = [1, 2] \cap]5/3, \infty[=]5/3, 2]$.	$x - 1 > 2(x-2)$ $\Leftrightarrow x - 1 > 2x - 4$ $\Leftrightarrow 3 > x$ $\Leftrightarrow x < 3$ Detta ger lösningsmängden $L_3 = [2, \infty[\cap]-\infty, 3[= [2,3[$.

Vi får då $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left]\frac{5}{3}, 2\right] \cup [2,3[= \left]\frac{5}{3}, 3\right[$.

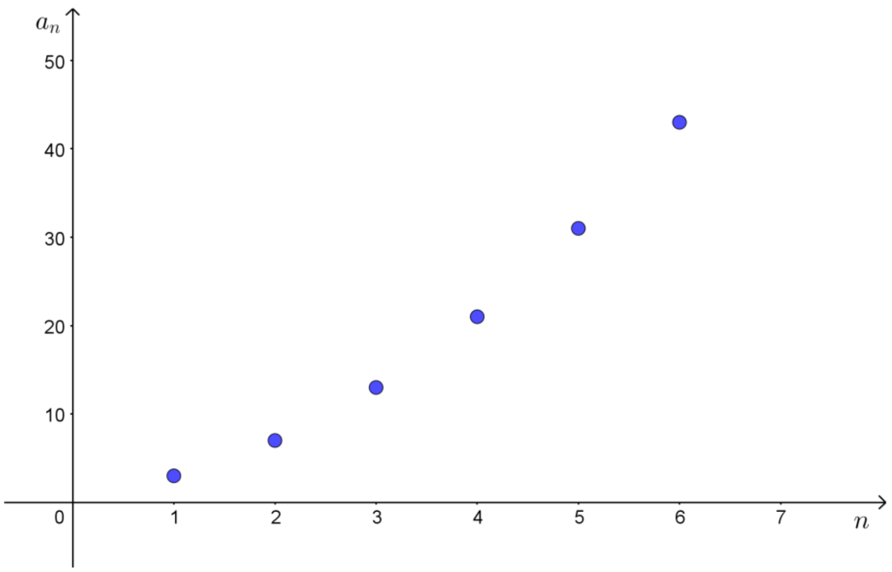
Svar: Olikheten gäller för $x \in \left]\frac{5}{3}, 3\right[$. (Rita en figur liknande den i a) ovan.)

1.6 Summor (t.o.m. sid. 42)

a) Inledning: Talföljder

Givet **talföljden** $3, 7, 13, 21, 31, 43, \ldots$, där första **elementet** (talet) ges av $a_1 = 3$, fjärde elementet ges $a_4 = 21$ o.s.v. Denna talföljd ges av formeln $a_n = n^2 + n + 1$ där $n \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. n är ett positivt heltal $n = 1, 2, 3, \ldots$. Talföljdens element har ett bestämt ordningsnummer, i detta fall n, som anger vilken position talet står på.

Grafen till ovanstående talföljd blir enligt figur.



Exempel 21
Bestäm ordningsnumret för elementet -20 i talföljden $a_n = 8 + 3n - n^2$.

b) Summasymbolen $\sum$ ("sigma")

För de *n* första elementen i en talföljd har vi summan $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Detta skrivs med symbolen

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

som läses ”summa a_k då *k* går från 1 till *n*”.

Exempel 22

Beräkna a) $\sum_{k=1}^{20} k$ b) $\sum_{i=1}^{n} x^i$ c) $\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+7}$

Observera att t.ex. $\sum_{j=1}^{20} j$ kan skrivas $\sum_{j=0}^{19}(j+1)$ eller $\sum_{j=3}^{22}(j-2)$ etc…

c) Aritmetiska summor

Givet talföljden 2, 5, 8, 11, … . Vi kan se att **differensen** mellan två närliggande element är konstant lika med 3. En möjlig formel är t.ex. $a_n = 2 + 3n,\ \ n = 0, 1, 2, 3, ...$ eller $a_n = -1 + 3n,\ \ n = 1, 2, 3, ...$ Detta är ett exempel på en **aritmetisk talföljd**.

En allmän formel för element n för en aritmetisk talföljd ges av

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Det första talet i talföljden är a_1 och d kallas den aritmetiska talföljdens **differens**.

Exempel 23
Givet den aritmetiska talföljden $2, -1, -4, -7, ...$.
a) Ange en formel för denna aritmetiska talföljd
b) Bestäm det 27:e elementet i talföljden.
c) Vilket ordningsnummer har elementet -319?

Med en **aritmetisk summa** menas summan av de n första termerna i en aritmetisk talföljd. Denna summa ges av

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

där a_1 är första termen och a_n är den sista.

Bevis:

Vi kan skriva summan $\boldsymbol{s_n}$ av de $\boldsymbol{n}$ första termerna som

$$\boldsymbol{s_n = a_1 \quad + \quad (a_1 + d) \quad + \quad (a_1 + 2d) \quad + \quad \ldots \quad + a_n}$$

eller (omvänd ordning)

$$\boldsymbol{s_n = \; a_n \quad + \quad (a_n - d) \quad + \quad (a_n - 2d) \quad + \quad \ldots \quad + a_1}$$

Om vi **summerar ledvis** får vi

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)$$

$$\Leftrightarrow 2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$\Leftrightarrow s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \text{v.s.v.}$$

Exempel 24

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050$$

d) Geometriska summor

Talföljden 2, 6, 18, 54, ... fås genom att multiplicera det närmast föregående talet (förutom det första) med konstanten 3. En formel för talföljden skulle då kunna vara $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$.
Detta är ett exempel på en **geometrisk talföljd**.

En allmän formel för element nummer n i en geometrisk talföljd ges av

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

där a_1 är det första elementet och q är **kvoten** mellan ett tal och talet närmast innan (d.v.s. $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$).
Genom uppräkning får vi: $a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \dots$.

Exempel 25
I en geometrisk talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots$ gäller det att $a_3 = 8$ och $a_6 = 1$.
a) Ange en formel för denna geometriska talföljd.
b) Bestäm det 9:e elementet i denna talföljd.
c) Vilket ordningsnummer har elementet $\frac{1}{128}$?

Lösning:
a) Om talföljdens kvot = q, så ger oss de givna villkoren

$$\begin{cases} a_3 = a_1 q^{3-1} = 8 \\ a_6 = a_1 q^{6-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^2 = 8 \\ a_1 q^5 = 1 \end{cases}.$$

Ledvis division ger

$$\frac{a_1 q^5}{a_1 q^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

som ger

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow a_1 = 32.$$

Alltså har vi

$$a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n = 1,2,3, \dots$$

b)

$$a_9 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

c)

$$32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{128} \Leftrightarrow 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^7} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow n-1 = 12 \Leftrightarrow n = 13.$$

Svar:
a) Talföljdens termer kan skrivas $a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n = 1,2,3, \dots$
b) $a_9 = \frac{1}{8}$
c) Ordningsnumret är 13, d.v.s. 13:e termen är $\frac{1}{128}$.

Med en **geometrisk summa** menas summan av de n första elementen i en geometrisk talföljd. Denna summa betecknas med s_n och ges av

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \begin{cases} na_1 & \text{om} \quad q = 1 \\ \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} & \text{om} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

där a_1 är första termen och n är antalet termer.

Bevis

Om den geometriska summan med n termer har a som första term och kvoten q har vi

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \text{ ... (1)}$$

som vi multiplicerar med kvoten q, vilket ger

$$qs_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \text{ ... (2)}$$

Om vi subtraherar ledvis (2) − (1) får vi

$$qs_n - s_n = a_1 q^n - a_1$$

$$\Leftrightarrow s_n(q - 1) = a_1(q^n - 1)$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{om } q \neq 1} s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Om $q = 1$ är alla termerna lika med a_1, så att

$$s_n = na_1$$

Detta visar påståendet ovan.

Exempel 26

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^9} = 2 - \frac{1}{512} = \frac{1023}{512}$$