TSKS10 Signaler, information & Kommunikation

Föreläsning 7

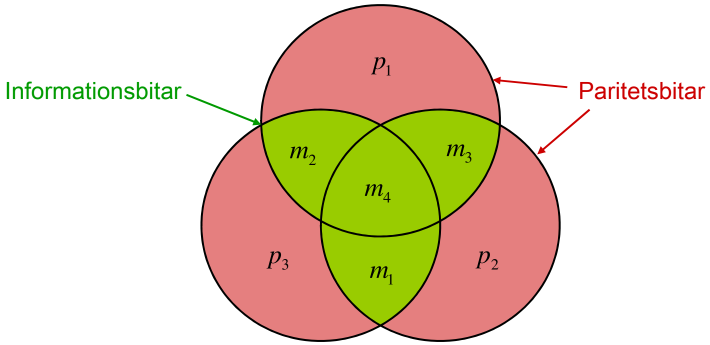
Kanalkodning: Exempel på explicita koder

Kanalkodningssatsen

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Kommunikationssystem

LINKÖPINGS UNIVERSITET

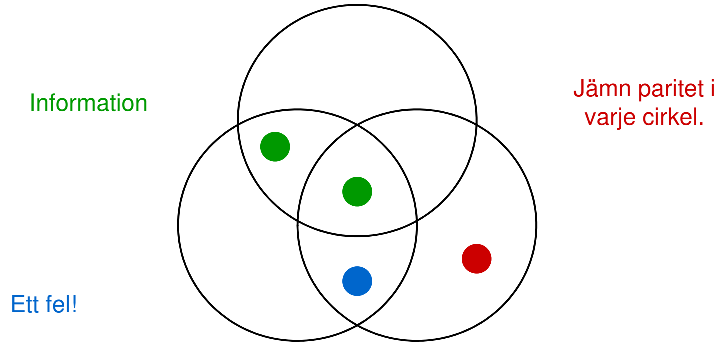
Hamming-[7,4]-koden



Jämn paritet i varje cirkel. $\Rightarrow$

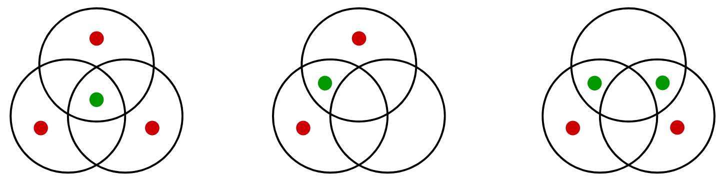
$$\begin{cases} p_1 = m_2 + m_3 + m_4 & (\mathrm{mod}\ 2) \\ p_2 = m_1 + m_3 + m_4 & (\mathrm{mod}\ 2) \\ p_3 = m_1 + m_2 + m_4 & (\mathrm{mod}\ 2) \end{cases}$$

Hamming-[7,4]-koden – Exempel



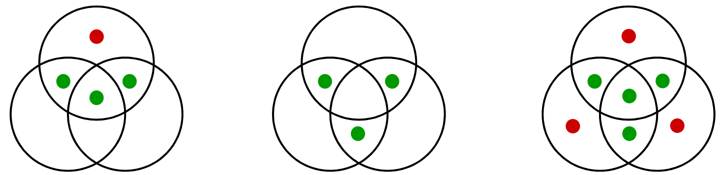
Resultat: Jämn paritet i den övre cirkeln, udda paritet i de andra två cirklarna. Endast en position kan förklara det – det faktiska felet.

Hamming-[7,4]-koden – Fler exempel



Information

Jämn paritet i varje cirkel.

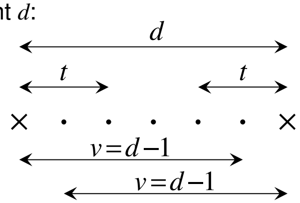


Förmåga att rätta och detektera fel

Felrättningsförmåga: $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ Koden kan rätta varje w-bitars fel om $w \le t$.

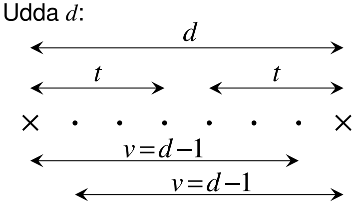
Feldetekteringsförmåga: $v = d-1$ Koden kan detektera varje w-bitars fel om $w \le v$.

Jämnt d:



$$t = \frac{d-2}{2}$$

Udda d:



$$t = \frac{d-1}{2}$$

Kanalkodningssatsen (för diskreta kanaler) – slarvig formulering

För varje diskret kanal finns det ett C, $0 \le C \le 1$, sådan att det går att kommunicera med godtyckligt låg felsannolikhet med någon kod med takt R för varje $R < C$. C kallas kanalens kapacitet.

Man kan också visa:

Om vi försöker kommunicera med takt $R > C$, så är vi garanterade att få en nollskild felsannolikhet. Det går också att ge en explicit undre gräns för denna felsannolikhet.

Exempel på en kod – Takt $R = \log_2(M)/N$

$$\begin{array}{c} M \\ \text{(number of} \\ \text{codewords)} \end{array} \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} \texttt{0000000000000000000000000}\cdots\ \texttt{00000} \\ \texttt{0000000000000000000000000}\cdots\ \texttt{00100} \\ \texttt{0000000000000000000000100}\cdots\ \texttt{01001} \\ \quad\vdots \\ \texttt{0001001001000010000000011}\cdots\ \texttt{00101} \\ \texttt{0001111000000001011110010}\cdots\ \texttt{01000} \\ \texttt{1111110011111100111111100}\cdots\ \texttt{11001} \end{array}}_{N \text{ (number of binary digits per codeword)}} \right. \begin{array}{l} (X_1) \\ (X_2) \\ (X_3) \\ \quad\vdots \\ \\ \\ (X_M) \end{array}$$

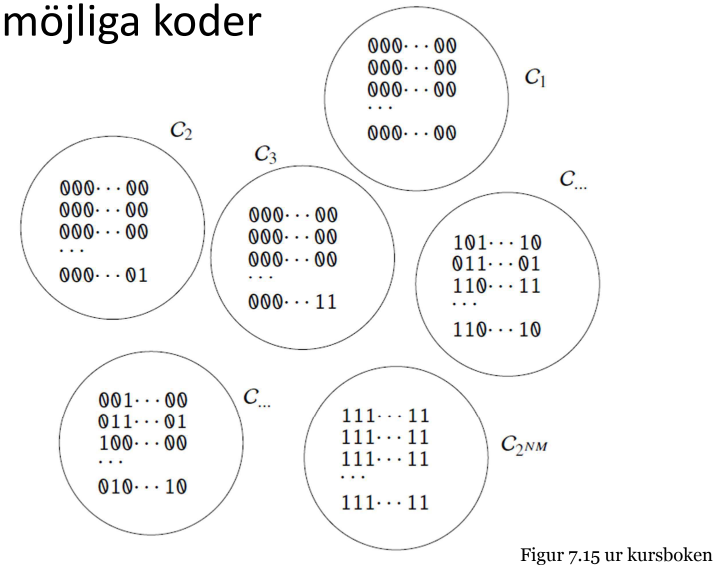
Figur 7.2 ur kursboken

Exempel på en kod – Takt $R = \log_2(M)/N$

$$\begin{array}{c} M \\ \text{(antal kodord)} \end{array} \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} \texttt{0000000000000000000000000}\cdots\ \texttt{00000} \\ \texttt{0000000000000000000000000}\cdots\ \texttt{00100} \\ \texttt{0000000000000000000000100}\cdots\ \texttt{01001} \\ \quad\vdots \\ \texttt{0001001001000010000000011}\cdots\ \texttt{00101} \\ \texttt{0001111000000001011110010}\cdots\ \texttt{01000} \\ \texttt{1111110011111100111111100}\cdots\ \texttt{11001} \end{array}}_{N \text{ (antal bitar per kodord)}} \right. \begin{array}{l} (X_1) \\ (X_2) \\ (X_3) \\ \quad\vdots \\ \\ \\ (X_M) \end{array}$$

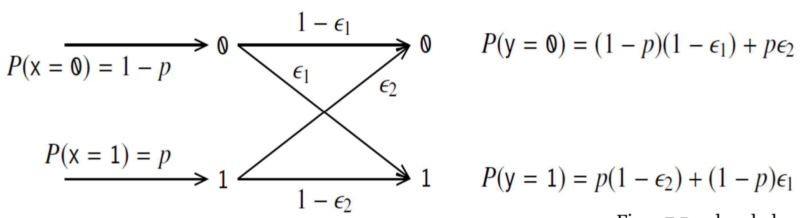
Motsvarar figur 7.2 ur kursboken

Alla möjliga koder



Figur 7.15 ur kursboken

Binär källa och binär kanal



Figur 7.5 ur kursboken

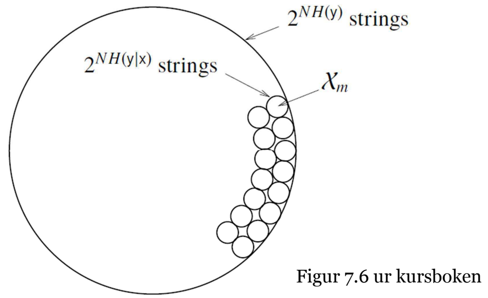
Antal typiska insignaler: $\binom{N}{pN} \approx 2^{N \cdot H_2(p)} = 2^{N \cdot H(x)}$

Antal typiska utsignaler för en typisk insignal:

$$\binom{(1-p)N}{\epsilon_1(1-p)N}\binom{pN}{\epsilon_2 pN} \approx 2^{N \cdot H(y|x)}$$

Totalt antal typiska utsignaler: $\binom{N}{((1-\epsilon_2)p + \epsilon_1(1-p))N} \approx 2^{N \cdot H(y)}$

Packa mängder av typiska utsekvenser



Figur 7.6 ur kursboken

Ömsesidig information: $I(y;x) = H(y) - H(y|x)$

Vi har plats för
$$\frac{2^{N \cdot H(y)}}{2^{N \cdot H(y|x)}} = 2^{N \cdot I(y;x)}$$
disjunkta mängder av storlek
$$2^{N \cdot H(y|x)}$$
bland dessa
$$2^{N \cdot H(y)}$$
typiska utsekvenser.

Tänkbar kod: Välj $2^{N \cdot I(y;x)}$ typiska insekvenser som kodord, så att motsvarande mängder av typiska utsekvenser väsentligen inte överlappar. Koden har $N \cdot I(y;x)$info-bitar, och därmed takt R $= \frac{N \cdot I(y;x)}{N} = I(y;x)$.

Kanalkodningssatsen (för diskreta kanaler)

Ömsesidig information:

$$I(y;x) = H(y) - H(y|x)$$
$$= H_2\big((1-\epsilon_2)p + \epsilon_1(1-p)\big) - (1-p)H_2(\epsilon_1) - pH_2(\epsilon_2)$$

Kanalens kapacitet:

$$C = \max_p I(y;x)$$

Kanalkodningssatsen:

För en diskret kanal och för givna konstanter $\delta > 0$ och $\gamma > 0$ så finns det en kodordslängd N och en kod med kodord av längd N som har takt $C - \delta$, och som gör det möjligt att kommunicera med felsannolikhet $P_e < \gamma$.

Men! Satsen säger ingenting om hur en sådan kod kan se ut.

Mikael Olofsson
ISY/CommSys

www.liu.se