Analys III, TNA006

1. (a) Funktionalmatrisen och funktionaldeterminanten är

$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & -e^{x_2} \\ e^{x_1} & e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} e^{x_1} & -e^{x_2} \\ e^{x_1} & e^{x_2} \end{vmatrix} = 2e^{x_1}e^{x_2}$$

   (b) Linjäriseringen ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Funktionen f är kontinuerlig, området är kompakt vi vet således att största och minsta värde kommer att antas.

   Stationära punkter: $\nabla f = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} f'_x &= 4x = 0 \\ f'_y &= 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

   Vilket ger en stationär punkt $(0, \frac{1}{2})$.

   Singulära punkter: ∇f är definierad i alla punkter, således inga singulära punkter.

   Randen: Består av tre delkurvor:

   - $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$:

$$g_1(x) = f(x, 0) = 2x^2, \quad g_1' = 4x$$

     eftersom g_1 deriverbar i alla punkter så får vi följande intressanta punkter $(0, 0)$ (derivatans nollställe och ändpunkt) och $(1, 0)$ (ändpunkt)

   - $x + y = 1$, $0 \leq x \leq 1$:

$$g_2(x) = f(x, 1 - x) = 2x^2 + (1 - x)^2 - (1 - x) = 3x^2 - x$$

     Vi har att $g_2' = 6x - 1$ eftersom g_2 deriverbar i alla punkter så får vi följande intressanta punkter

$$(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}), \text{ derivatans nollställe } (1, 0), (0, 1) \text{ ändpunkter}$$

- $x = 0$, $0 \le y \le 1$:

$$g_3(y) = f(0, y) = y^2 - y, \quad g_3' = 2y - 1$$

eftersom g_3 deriverbar i alla punkter så får vi följande intressanta punkter $(0, \frac{1}{2})$ (derivatans nollställe) $(0, 0)$ och $(1, 0)$ (ändpunkter)

Sammanfattningsvis har vi följande punkter:

$$f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, \quad f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = 2, \quad f(0, 1) = 0, \quad f(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) = -\frac{1}{12}$$

Svar: Minsta värdet är $-\frac{1}{4}$ och största värdet är 2.

3. (a) Låt $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 3$ då är $\nabla F = (2x, 4y, -6z)$ en normalvektor till tangentplanet är då $\nabla F(2, 1, -1) = (4, 4, -6)$. Tangentplanet är

$$2(x - 2) + 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0.$$

(b) Tangentvektorer är

$$\mathbf{r}_s' = (\cos s, -\sin s, t), \quad \mathbf{r}_t' = (0, 0, s).$$

En normalvektor är

$$\mathbf{r}_s'(\frac{\pi}{2}, 2) \times \mathbf{r}_t'(\frac{\pi}{2}, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0)$$

En punkt i tangentplanet är $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}, 2) = (1, 0, \pi)$ Tangentplanet är

$$x = 1$$

4. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 3z_u' + z_v'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = z_u'$$

I PDE

$$z_x' - 3z_y' = 3z_u' + z_v' - 3z_u' = z_v'$$

Högerledet $x - y$ måste uttryckas i u och v innan vi kan lösa. Det ger

$$z_v' = x - y = 4v - u, \quad z_v' = 4v - u \Rightarrow z = 2v^2 - uv + g(u)$$

Lösningen är $z(x, y) = 2x^2 - x(3x + y) + g(3x + y)$ där g är en godtycklig deriverbar funktion.