

TNA001- Matematisk grundkurs

Tentamen 2015-10-30 - Lösningsskiss

1. a) Vi löser ekvationen $|x| + |x - 3| = 2x + 4$ genom att studera tre fall.

Fall 1: $x \leq 0$. Vi får ekvationen: $-x + 3 - x = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$, som duger ty $x = -\frac{1}{4}$ tillhör aktuellt intervall.

Fall 2: $0 \leq x \leq 3$. Vi får ekvationen: $x + 3 - x = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, som inte är lösning, ty $x = -\frac{1}{2}$ tillhör inte det aktuella intervallet.

Fall 3: $x \geq 3$. Vi får ekvationen: $x + x - 3 = 2x + 4$, som saknar lösning.

Svar: $x = -\frac{1}{4}$

b)

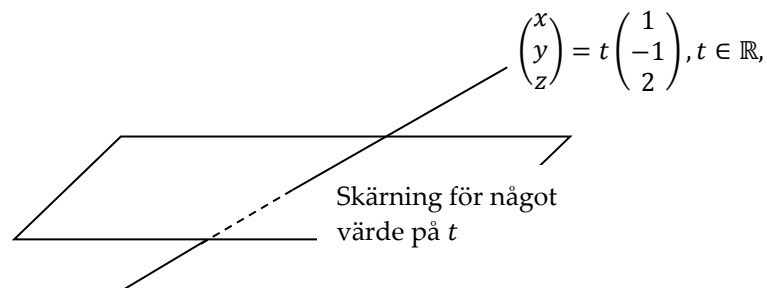
$$x + 2 \leq \frac{2x}{x-1} \Leftrightarrow x + 2 - \frac{2x}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1) - 2x}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x-1} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup]1, 2]$.

Svar: $x \in]-\infty, -1] \cup]1, 2]$.

2. a) Vi ritar först en skiss.



Vi har linjens ekvation: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, och planets ekvation $3x - 2y + z = 14$ och skall bestämma det värde på parametern t som satisfierar båda ekvationerna. Vi får, då vi sätter in linjens ekvation i planets, villkoret

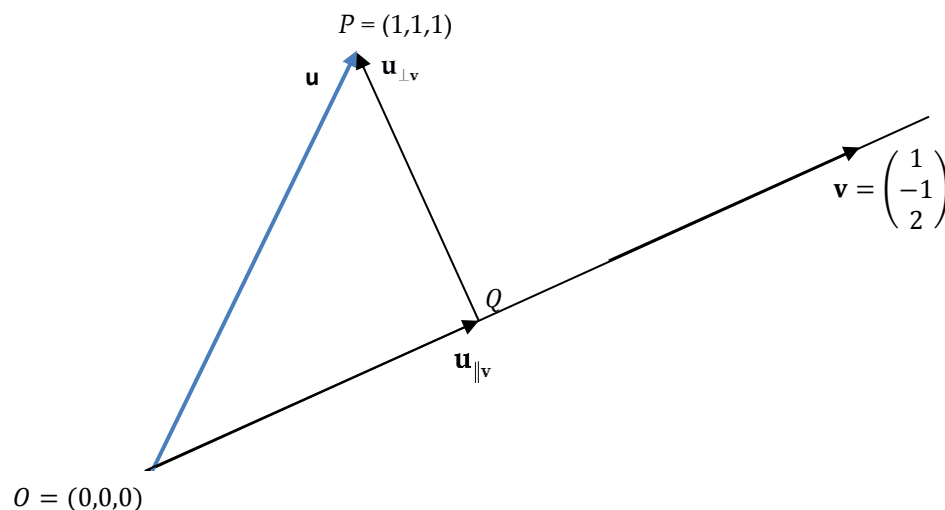
$$3t - 2 \cdot (-t) + 2t = 14 \Leftrightarrow t = 2,$$

som insatt i linjens ekvation ger skärningspunkten

$$(2, -2, 4)$$

Svar: Linjen skär planet i punkten $(2, -2, 4)$.

b) Först ritar vi en figur/skiss.



Vi söker

koordinaterna för punkten Q och behöver den riktade sträckan $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}}$. Vi observerar att origo ligger på linjen och låter $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Av projektnsformeln får vi

$$\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

vilket ger oss

$$Q = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Svar: Den ortogonala projektionen av punkten P på linjen är punkten $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

c) Av figuren ovan ser vi att vi skall söka $|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}|$ där

$$\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är det sökta avståndet

$$|\mathbf{u}_{\perp \mathbf{v}}| = \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \sqrt{21} \text{ l. e.}$$

Svar: Avståndet mellan punkten P och den givna linjen är $\frac{1}{3} \sqrt{21}$ l. e.

3.

(a1) Vi har $|z_1| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Alltså

$$z_1 = 3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Svar: $z_1 = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

(a2)

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{24} = \left(\frac{3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\pi/3}} \right)^{24} = (3\sqrt{2})^{24} \left(e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} \right)^{24} = 3^{24} \cdot 2^{12} e^{i(-\frac{\pi}{12}) \cdot 24} = 3^{24} \cdot 2^{12} \underbrace{e^{-i2\pi}}_{=1} = 3^{24} \cdot 2^{12} =$$

= 1 156 831 381 426 176 (som naturligtvis inte behöver beräknas/anges)

Svar: $3^{24} \cdot 2^{12}$

b) Villkoret $|z - i| = 1$ innebär att z ligger på cirkelranden till cirkeln med radie 1 och medelpunkt i $0 + i$, d.v.s. randen till cirkeln med ekvationen

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

där $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$. Om vi här sätter in villkoret $\operatorname{Im} z = 1 + \operatorname{Re} z \Leftrightarrow y = 1 + x$, får vi

$$x^2 + (1 + x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ger oss $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ger att $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Båda villkoren gäller alltså för

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Svar: $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

4. a) Eftersom $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ så är $\sin \alpha > 0$. Med trigonometriska ettan får vi

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = [\text{ty } \sin \alpha > 0] = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Vi har alltså

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

Svar: $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$

b) Vi utnyttjar additionsformeln för sinus och får

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = C \sin(2x + v) = C(\sin 2x \cos v + \cos 2x \sin v) =$$

$$= C \sin 2x \cos v + C \cos 2x \sin v$$

Vi ser då att följande måste gälla

$$\begin{cases} C \cos v = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ C \sin v = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos v = \frac{\sqrt{3}}{2C} \\ \sin v = \frac{1}{2C} \end{cases}$$

Eftersom $(\cos v, \sin v)$ är en punkt på enhetscirkeln får vi villkoret

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2C}\right)^2 + \left(\frac{1}{2C}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow C = \pm 1$$

Vi väljer $C = 1$ och får

$$\begin{cases} \cos v = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

och kan välja $v = \pi/6$.

Alltså

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) Flera alternativa Lösningstrategier finns. Vi väljer följande, där vi i första steget använder subtraktionsformeln för sinus:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow [\text{se resultatet från b)} - \text{uppgiften}]$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

5. a)

$$e^x - 27e^{x/4} = 0 \Leftrightarrow [t = e^{x/4}, t > 0]$$

$$t^4 - 27t = 0, t > 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 27) = 0, t > 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Alltså

$$e^{x/4} = 3 \Leftrightarrow x = 4 \ln 3$$

Svar: $x = 4 \ln 3$

b) Termerna i olikheten är alla definierade om $x \in]-\infty, 1[\cap]0, \infty[=]0, 1[$.

Alltså:

$$\ln(1-x) - 2 \ln x \leq \ln 2, 0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(1-x) \leq \ln 2 + \ln x^2, 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln(1-x) \leq \ln 2x^2, 0 < x < 1 \Leftrightarrow [\text{ty } \ln - \text{funktionen är strängt växande}]$$

$$1-x \leq 2x^2, 0 < x < 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \geq 0, 0 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \geq 0, 0 < x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) \geq 0, 0 < x < 1 \Leftrightarrow \left[\text{Gör teckenstudium på } \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) \geq 0 \right] \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(]-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty[\right) \cap]0, 1[= \left[\frac{1}{2}, 1[$$

Svar: $x \in \left[\frac{1}{2}, 1[$.

6. Vi visar sambandet med induktion.

Steg I:

$$VL(1) = \sum_{k=1}^1 (1-k+k^2) = 1-1+1^2 = 1 = \frac{1(1^2+2)}{3} = HL(1)$$

Så sambandet gäller för $n = 1$.

Steg II: Vi antar att sambandet gäller för godtyckligt fixt $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. att

$$VL(p) = \sum_{k=1}^p (1-k+k^2) = \frac{p(p^2+2)}{3} = HL(p)$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} (1-k+k^2) = \left(\sum_{k=1}^p (1-k+k^2) \right) + (1-(p+1)+(p+1)^2) = [\text{enligt antagandet}] = \\ &= \frac{p(p^2+2)}{3} + 1-p-1+p^2+2p+1 = \frac{p(p^2+2)}{3} + p^2+p+1 = \\ &= \frac{p(p^2+2)+3p^2+3p+3}{3} = \frac{p^3+2p+3p^2+3p+3}{3} = \frac{p^3+3p^2+5p+3}{3} \end{aligned}$$

Vi har också

$$\begin{aligned} HL(p+1) &= \frac{(p+1)((p+1)^2+2)}{3} = \frac{(p+1)(p^2+2p+3)}{3} = \\ &= \frac{p^3+2p^2+3p+p^2+2p+3}{3} = \frac{p^3+3p^2+5p+3}{3} \end{aligned}$$

Därmed har vi visat att om $VL(p) = HL(p)$ så gäller det att $VL(p+1) = HL(p+1)$

Steg III

Påståendet gäller enligt Steg I för $n = 1$. Enligt Steg II gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Alltså gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, **v.s.v.**

7. a) Eftersom $\arcsin t$ är definierad för $t \in [-1, 1]$ och $\cos v$ är definierad för alla $v \in \mathbb{R}$, så är

$f(x) = \cos(\arcsin(3x-1))$ definierad om $-1 \leq 3x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$. Alltså har vi $D_f = \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

För $x \in D_f$ gäller det att $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(3x-1) \leq \frac{\pi}{2}$, vilket innebär att $0 \leq f(x) \leq 1$, ty $0 \leq \cos v \leq 1$ om $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Alltså är $V_f = [0, 1]$.

Vi undersöker om f har invers. Vi har

$$y = \cos(\arcsin(3x - 1)), x \in \left[0, \frac{2}{3}\right], y \in [0, 1] \Leftrightarrow \arccos y = \arcsin(3x - 1), x \in \left[0, \frac{2}{3}\right], y \in [0, 1].$$

Låt $\theta = \arccos y = \arcsin(3x - 1) \Leftrightarrow \cos \theta = y, \sin \theta = 3x - 1$. Detta ger oss (för $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right], y \in [0, 1]$), eftersom $(\cos \theta, \sin \theta)$ är en punkt på enhetscirkeln,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1 \Leftrightarrow y^2 + (3x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{1 - y^2}$$

Så, för alla $y \in [0, 1[$ svarar två $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, vilket innebär att f saknar invers.

Anm: För att visa att f saknar invers räcker det att visa att det finns $a \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ och $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ med $a \neq b$ och sådana att $f(a) = f(b) = c$, där $c \in [0, 1]$. T.ex. gäller det att $f(0) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

Svar: $D_f = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ och $V_f = [0, 1]$, f saknar invers.

b) För ekvationen $\arcsin(3x - 1) = \arccos 2x$ gäller det (se bl.a. a)-uppgiften ovan) att båda termerna är definierade om $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Eftersom vidare $\arcsin(3x - 1)$ är strängt växande, med $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(3x - 1) \leq \frac{\pi}{2}$, så gäller det att $\arcsin(3x - 1) \leq 0$ för $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Men $\arccos 2x \geq 0$ för $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, vilket innebär att det för en eventuell lösning till ekvationen måste gälla att $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Vi kan även utesluta $x = \frac{1}{2}$ som lösning eftersom $VL\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq 0 = HL\left(\frac{1}{2}\right)$. Även $x = \frac{1}{3}$ kan uteslutas eftersom $VL\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ och $HL\left(\frac{1}{3}\right) > 0$.

Låt $\theta = \arcsin(3x - 1) = \arccos 2x$ för $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Det innebär att $\sin \theta = 3x - 1$ och $\cos \theta = 2x$.

Trigonometriska ettan ger oss villkoren

$$(3x - 1)^2 + (2x)^2 = 1 \text{ och } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 + 4x^2 = 1, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$13x^2 - 6x = 0, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow x(13x - 6) = 0, x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{6}{13}$$

Anm: Kurvorna $y = \arcsin(3x - 1)$ och $y = \arccos 2x$ är ritade i figuren till höger.

Svar: Ekvationen har lösningen $x = \frac{6}{13}$.

