TENTAMEN

Datum:	14 januari 2017
Tid:	14-18
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Joakim Ekström, 011-363011
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

Företaget Norrköpings Must AB tillverkar julmust. Mustens huvudingrediens är vatten, men företaget förväntar sig obegränsad tillgång på vatten, så vi kan bortse från den resursen. Utöver vattnet ingår det 30 ingredienser, t.ex. sötningsmedel, karamellfärger, citronsyra och maltextrakt i receptet. Enligt receptet krävs det a_k enheter av ingrediens k för att producera en enhet must. Totalt finns det b_{kt} enheter av ingrediens k tillgängliga från företagets leverantörer under månad t. Mustproduktionen har tre huvudsakliga moment: ingredienserna ska blandas, musten ska kolsyras, och den färdiga produkten ska buteljeras. De tre momenten, j, har en produktionskapacitet på f_{jt} enheter vardera under månad t. Företaget har avtal med grossister gällande hur mycket must de måste leverera per månad, e_t. Företaget har en produktionskostnad på c_t kronor per enhet i månad t. Must som produceras utöver efterfrågan under en månad kan lagras till nästa månad. Lagret har en kostnad på d kronor per enhet. Företagets kostnadsminimeringsproblem för produktionen de kommande två månaderna har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem nedan.

$$\min z = \sum_t c_t x_t + d \sum_t l_t$$

då

$$x_t \leq f_{jt}, \quad t = 1,2, \; j = 1,2,3 \qquad (1)$$
$$a_k x_t \leq b_{kt}, \quad k = 1,2,\dots,30, t = 1,2 \qquad (2)$$
$$l_{t-1} + x_t - e_t = l_t, \quad t = 1,2 \qquad (3)$$
$$x_t, l_t, \geq 0, \quad t = 1,2$$

a) Definitionerna av de två variabelgrupperna (x_t och l_t) har trillat bort. Formulera utifrån uppgiftsbeskrivningen och den formulerade modellen de saknade variabeldefinitionerna. (1 p)

x_t = antalet enheter must som tillverkas i månad *t*, *t=1,2*
l_t = antalet enheter must som lagras från månad *t* till månad *t+1*, *t=0,1,2*

b) För bivillkorsgrupperna (1), (2), och (3), ange hur många bivillkor som är formulerade i respektive grupp. (1 p)

(1): 6, (2): 60, (3):2

För deluppgift c och d ska den formulerade modellen fortsatt endast ha linjär målfunktion och linjära bivillkor, däremot får variabler med heltalskrav introduceras.

c) Din uppgift är att göra förändringar i modellen som tar hänsyn till följande information:

Företaget kan även ta in personal på övertid, vilket ökar produktionskapaciteten i moment j under månad t med upp till m_{jt} enheter. Övertiden som krävs för att producera en enhet extra must i moment j under månad t kostar g_{jt} kronor att köpa in. (2 p)

Lägg till variabel: y_{jt} = övertid som köps in (enhet: antalet timmar som krävs för att tillverka en extra enhet must)
Ändra i bvk (1): $x_t \leq f_{jt} + y_{jt}$
Lägg till bvk: $y_{jt} \leq m_{jt}$, $\quad = 1, 2, 3, t = 1, 2$
Addera till målfunktionen: $\sum_t \sum_j g_{jt} y_{jt}$

d) Din uppgift är att göra förändringar i modellen som tar hänsyn till följande information:

Utöver att köpa in övertid kan företaget även välja att köpa kapacitet i en annan fabrik under en månad. Då blir produktionskapaciteten (exklusive övertid) dubbelt så stor som den är från början. Dvs. kapaciteten dubblas i samtliga moment om man väljer att köpa kapacitet i en annan fabrik. Detta medför en uppstartskostnad på u kronor, utöver produktionskostnaden per enhet (som är densamma). (1 p)

Lägg till variabel: $p_t = 1$ om den extra kapaciteten köps in i månad *t*, 0 annars.
Ändra i bvk (1): $x_t \leq f_{jt} + y_{jt} + p_t f_{jt}$
Addera till målfunktionen: $u \sum_t p_t$

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar bord och stolar. Företaget har identifierat två kritiska moment i produktionskedjan som varje möbel måste gå igenom: montering och målning, och vill planera sin produktion för de närmaste två månaderna. Arbetstidsåtgången för montering/målning samt företagets tillgängliga arbetstid under de två månaderna står i tabellen nedan.

	Tidsåtgång (h)		Tillgänglig tid (h)	
	Bord	Stol	Månad 1	Månad 2
Montering	2	0,5	1200	2200
Målning	0,7	0,3	1000	1000

Om inte arbetstiden räcker kan företaget köpa in extra arbetstid (i monteringsstadiet, inte för målning) för 220 kr/h. Det begränsande råmaterialet för möbeltillverkningen är trä. Företaget kan köpa in trä för 23 kr/enhet under månad 1 och 30 kr/enhet under månad 2. För att tillverka ett bord krävs det 10 enheter trä och en stol kräver 4 enheter trä. Förtjänsten för ett bord är 900 kr, för en stol är den 300 kr. Företaget har ett trälager med en maxkapacitet på 4000 enheter som kostar 3 kr/enhet mellan månad 1 och 2. Initialt är lagret halvfullt. Företagets problem att maximera vinsten för de kommande två månaderna (intäkt minus kostnad för trä och övertid) har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem och sedan lösts med AMPL/CPLEX.

Variabeldefinitioner:
$x_{it} =$ antal enheter av i som tillverkas månad t, där $i = B(ord), S(tol)$ och $t = 1, 2$
$l =$ antal enheter trä som lagras från månad 1 till 2
$y_t =$ antal enheter trä som köps in månad t
$o_t =$ antal timmar övertid som köps in under månad t
Parametrar:
$T_t =$ antal timmar övertid tillgängliga under månad t
$M_t =$ antal timmar tillgängliga för montering under månad t
$N_t =$ antal timmar tillgängliga för målning under månad t

$$\max z = 900(x_{B1} + x_{B2}) + 300(x_{S1} + 3x_{S2}) - 3l - 220(o_1 + o_2) - 23y_1 - 30y_2$$

då

$$o_t \leq T_t, \quad t = 1, 2 \quad (Max\ övertid)$$

$$2x_{Bt} + 0{,}5x_{St} \leq M_t + o_t, \quad t = 1, 2 \quad (Montering)$$

$$0{,}7x_{Bt} + 0{,}3x_{St} \leq N_t, \quad t = 1, 2 \quad (Målning)$$

$$l = 2000 + y_1 - 10x_{B1} - 4x_{S1}, \quad (Lagerbalans\ månad\ 1)$$

$$0 = l + y_2 - 10x_{B1} - 4x_{S1}, \quad (Lagerbalans\ månad\ 2)$$

$$l \leq 4000, \quad (Maxlager)$$

$$x_{B1}, x_{B2}, l, y_1, y_2, o_1, o_2 \geq 0, \quad (Icke - negativitet)$$

CPLEX 12.6.1.0: sensitivity
CPLEX 12.6.1.0: optimal solution;
objective 1368720
6 dual simplex iterations (4 in phase I)

:	_varname	_var	_var.rc	:=
1	produktion['Bord',1]	640	0	
2	produktion['Bord',2]	640	0	
3	produktion['Stol',1]	1840	0	
4	produktion['Stol',2]	1840	0	
5	lager	4000	0	
6	inköp[1]	15760	0	
7	inköp[2]	9760	0	
8	övertid[1]	1000	0	
9	övertid[2]	0	-4	
;				

:	_varname	_var.down	_var.current	_var.up :=
1	produktion['Bord',1]	898.667	900	1062
2	produktion['Bord',2]	720	900	903.333
3	produktion['Stol',1]	259.5	300	300.571
4	produktion['Stol',2]	298.571	300	377.143
5	lager	-7	-3	1,00E+20
6	inköp[1]	-25	-23	1,00E+20
7	inköp[2]	-50	-30	-26
8	övertid[1]	-221.6	-220	1,00E+20
9	övertid[2]	-1,00E+20	-220	-216
;				

:	_conname	_con.slack	_con.dual	:=
1	ÖvertidsBegr[1]	0	1.6	
2	ÖvertidsBegr[2]	800	0	
3	MonteringsBegr[1]	0	221.6	
4	MonteringsBegr[2]	0	216	
5	MålningsBegr[1]	0	324	
6	MålningsBegr[2]	0	240	
7	LagerSamband1	0	23	
8	LagerSamband2	0	30	
9	LagerBegr	0	4	
;				

:	_conname	_con.down	_con.current	_con.up :=
1	ÖvertidsBegr[1]	966.667	1000	1085.71
2	ÖvertidsBegr[2]	0	800	1,00E+20
3	MonteringsBegr[1]	1166.67	1200	1285.71
4	MonteringsBegr[2]	2166.67	2200	2285.71
5	MålningsBegr[1]	970	1000	1020
6	MålningsBegr[2]	970	1000	1020
7	LagerSamband1	-1,00E+20	2000	17760
8	LagerSamband2	-1,00E+20	0	9760
9	LagerBegr	0	4000	13760
;				

Uppgifter

a) I månad 2 köps ingen övertid in. Hur mycket billigare måste övertiden bli under månad 2 för att det ska vara intressant att köpa övertid? (1 p)
Svar: 4 kr/h, ges av reducerad kostnad.

b) Beskriv hur målfunktionsvärdet skulle förändras, storlek och riktning av förändringen (+/-/oförändrad), om (1) förtjänsten för bord i månad 1 ökar med 100 kr/bord eller (2) lagerkostnaden dubbleras till 6 kr/enhet. (2 p)
Svar: (1): Förändringen är inom det intervall då lösningen är oförändrad. Målfunktionsvärdet skulle öka (+) med 100*640=64000 kr. (2): Förändringen är inom det intervall då lösningen är oförändrad. Målfunktionvärdet skulle minska (-) med 3*4000=12000 kr.

c) Företaget får möjligheten att köpa in tre arbetsveckor (120 h) extra övertid i månad 1, utöver den övertid de redan har tillgång till. Beskriv minsta möjliga intervall på förändringen av målfunktionsvärdet. Innebär förändringen en ökning eller minskning av målfunktionsvärdet? (2 p)
Svar: Den relevanta dualvariabelns värde (1.6 kr) är giltigt upp till 1085.71 h. Målfunktionens värde skulle öka (relaxation, max-problem) med minst 1.6*85.71 (= 137.136 kr) och med mest 1.6*120 (=192 kr).

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande maximeringsproblem:

$\max z = 2x_1 + x_2$
då $-2x_1 + x_2 \leq 2$ (bvk1)
$x_1 \leq 5$ (bvk2)
$x_1 + x_2 \geq 2$ (bvk3)
$x_1, x_2 \geq 0$

a) Formulera problemet på standardform. (1p)

$\mathbf{\max z = 2x_1 + x_2}$
då $\mathbf{-2x_1 + x_2 + s_1 = 2}$ **(bvk1)**
$\mathbf{x_1 + s_2 = 5}$ **(bvk2)**
$\mathbf{x_1 + x_2 - s_3 = 2}$ **(bvk3)**
$\mathbf{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}$

b) Motivera utifrån figuren nedan om problemet har heltalsegenskap eller inte. (1p)

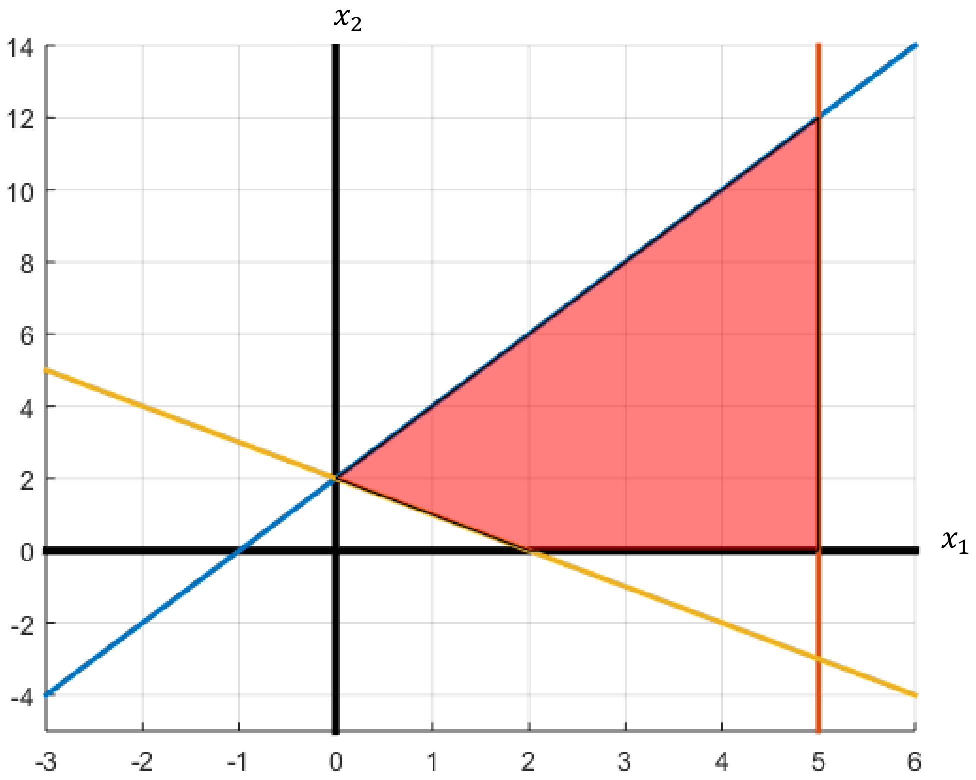
Ja, samtliga extrempunkter till det tillåtna området är heltaliga

c) I en iteration med simplexmetoden är den aktuella lösningen $x^{(1)} = \binom{2}{0}$.
   i) Vilka variabler (både ursprungliga och slackvariabler) är för denna lösning bas- respektive icke-basvariabler?
   ii) I nästa iteration med simplexmetoden är den aktuella lösningen $x^{(2)} = \binom{5}{0}$. Vilken variabel var inkommande basvariabel och vilken var utgående basvariabel när vi förflyttade oss från $x^{(1)}$ till $x^{(2)}$?
   iii) Vad var den reducerade kostnaden för den inkommande basvariabeln när vi förflyttade oss från $x^{(1)}$ till $x^{(2)}$?
   (3p)

i) **Endast x_2 och s_3 är noll i denna lösning, övriga variabler får icke-negativa värden när det kvarvarande ekvationssystemet löses. Dvs. x_1, s_1, s_2 är basvariabler. Kan även motiveras geometriskt utifrån figur.**

ii) **Basvariabler i punkten $x^{(2)} = \binom{5}{0}$ är x_1, s_1, s_3. Dvs. s_3 var inkommande och s_2 var utgående. Kan även motiveras geometriskt utifrån figur.**

iii) **Förändring i målfunktionsvärde mellan lösningarna $x^{(1)}$ och $x^{(2)}$: $z^{(2)} - z^{(1)} = 10 - 4 = 6$. Reducerad kostnad lika med förändrat målfunktionsvärde per enhet ökning av inkommande variabel (s_3 går från 0 till 3), dvs. 6/3=2.**



(5p) Uppgift 4

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$\max z = x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4$

då $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 25$

$x_4 + x_6 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_4 + x_7 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Problemet löses med simplexmetoden, och efter några iterationer erhålls följande tablå.

	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
z	1	0	-0.5	5	0	0	2.5	0.5	17.5
x5	0	0	1.5	1	0	1	-1.5	-0.5	12.5
x4	0	0	0	0	1	0	1	0	5
x1	0	1	0.5	0	0	0	-0.5	0.5	2.5

a) Fortsätt från tablån ovan och lös färdigt problemet med simplexmetoden. Var noga med att i varje iteration ange inkommande- och utgående basvariabel. Ange den optimala lösningen, och det optimala målfunktionsvärdet. (4p)

Inkommande x2, utgående x1. Tablå enligt nedan. Lösningen optimal ty samtliga reducerade kostnader för icke-basvariabler <= 0. $z^* = 20, x^* = (0, 5, 0, 5, 5, 0, 0)^T$

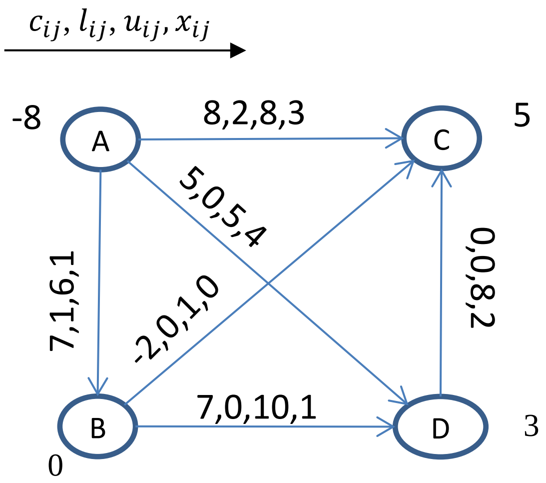
	z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
z	1	1	0	5	0	0	2	1	20
x5	0	-3	0	1	0	1	0	-2	5
x4	0	0	0	0	1	0	1	0	5
x2	0	2	1	0	0	0	-1	1	5

b) Avgör om lösningen som erhålls i a-uppgiften är unik eller ej. (1p)

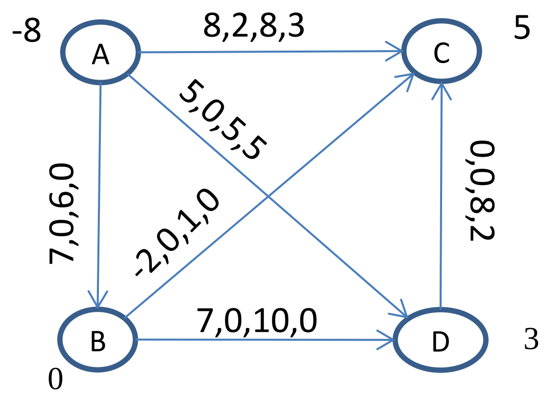
Lösningen är unik ty samtliga reducerade kostnader för icke-basvariabler < 0.

(5p) Uppgift 5

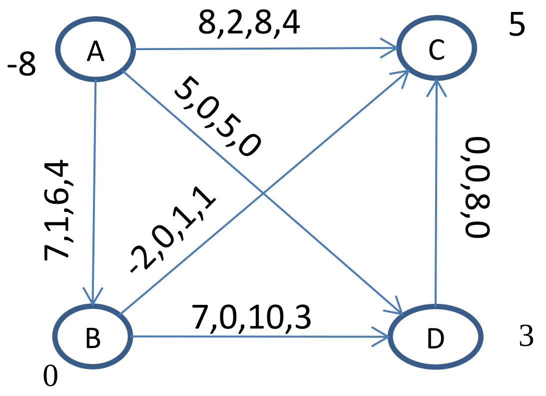
a) Betrakta de tre minkostnadsflödesnätverken nedan. Nodstyrkor finns angivna vid respektive nod. Avgör för vart och ett om det aktuella flödet utgör ett tillåtet basflöde. Om det utgör ett tillåtet basflöde, ange en uppsättning basbågar. Om det inte utgör ett tillåtet basflöde, ange varför. (1p)



Nej, båge (A,D), (A,C) och (D,C) måste vara basbågar men bildar cykel.

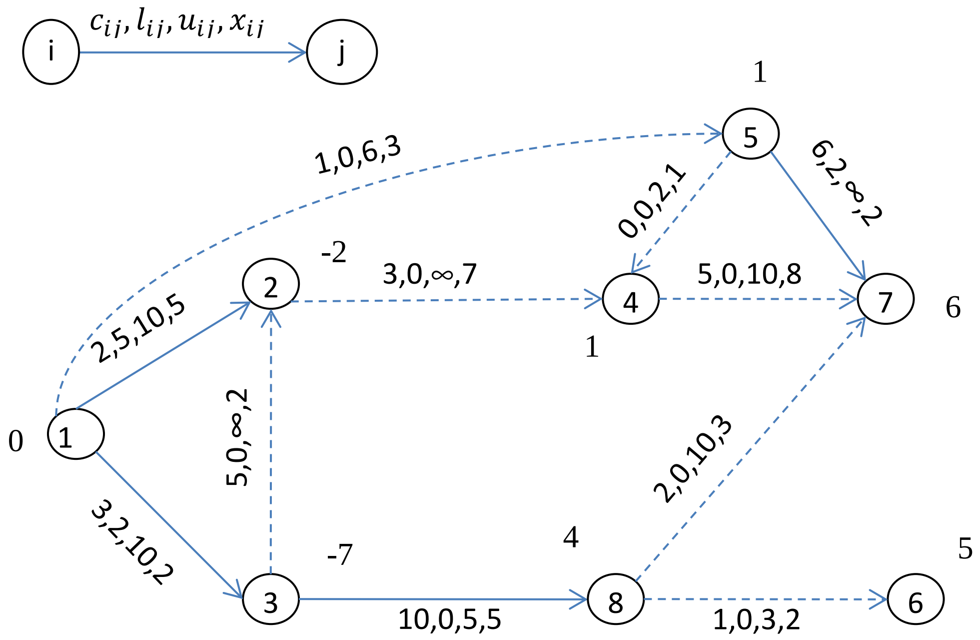


Tillåtet basflöde. Båge (A,C) och (D,C) måste vara basbåge. Därutöver en av bågarna (A,B), (B,C) eller (B,D).



Tillåtet basflöde. (A,C), (A,B) och (B,D) utgör basbågar.

För deluppgift b och c, betrakta nedanstående minkostnadsflödesnätverk. Nod 1 och 3 är källor med styrka 10 respektive 5, och nod 6 och 7 är sänkor med styrka 2 respektive 13. Varje båge är märkt med kostnad, undre gräns, övre gräns, samt aktuellt flöde.



b) Ta fram ett basträd samt nodpriser, och visa att lösningen är optimal. (2p)

Basbågar markerade med streckade linjer i figuren ovan. Nodpriser vid respektive nod i figuren ovan. Ställ upp optimalitetsvillkoren för icke-basbågar

$\bar{c}_{12} = 2 + 0 - (-2) = 4, x_{12} = l_{12}$ **ok**

$\bar{c}_{13} = 3 + 0 - (-7) = 10, x_{13} = l_{13}$ **ok**

$\bar{c}_{38} = 10 + (-7) - 4 = -1, x_{38} = u_{38}$ **ok**

$\bar{c}_{57} = 6 + 1 - 6 = 1, x_{57} = l_{57}$ **ok**

Lösningen är optimal.

c) Vad skulle det kosta att skicka ytterligare enheter från nod 1 till nod 8, utöver det som skickas nu? Ange kostnaden per enhet som skickas. För hur många ytterligare enheter som skickas är denna kostnad giltig? (2p)

Endast flödesförändringar som inte ändrar uppsättningen basbågar är tillåtna. Studera vilken flödes- och kostnadsförändring i basträdet en ytterligare enhet skickad från 1 till 8 utgör.
(1,5) ökar 1: +1 i kostnad
(5,4) ökar 1: +0 i kostnad
(4,7) ökar 1: +5 i kostnad
(8,7) minskar 1: -2 i kostnad
Kostnad 1+5-2=4 per enhet
Ges även av skillnad i nodpris mellan nod 8 och 1.

Båge (4,5) begränsar flödesförändringen i basträdet först, och kostnaden är endast giltig för att skicka en enhet från 1 till 8 ytterligare.