TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2014-01-10 - Lösningsskiss

1. a) Vi löser ekvationen $|2x-1| = 2-|x-2|$ genom att studera tre fall.
Fall 1: $x \le \frac{1}{2}$. Vi får ekvationen: $1-2x = 2-(2-x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, som duger ty tillhör aktuellt intervall.
Fall 2: $\frac{1}{2} \le x \le 2$. Vi får ekvationen: $2x-1 = 2-(2-x) \Leftrightarrow x = 1$, som duger.
Fall 3: $x \ge 2$. Vi får ekvationen: $2x-1 = 2-(x-2) \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} < 2$, och duger alltså inte.

Svar: $x = \frac{1}{3}, x = 1$.

b)

$$x-1 < \frac{1}{3-x} \Leftrightarrow x-1-\frac{1}{3-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(3-x)-1}{3-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-2)^2}{3-x} < 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]2,3[$.

Svar: $x < 3, x \neq 2$.

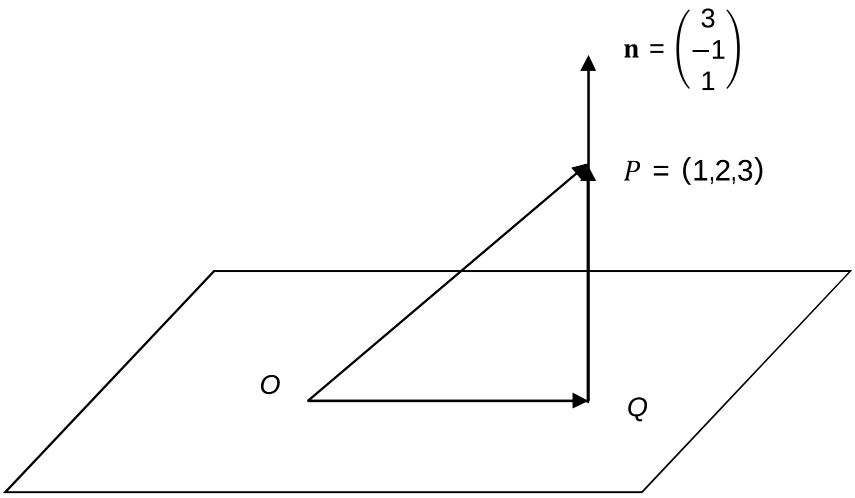
2. a) Vi sätter in linjens ekvation i planets för att få villkor på t vid ev. skärning. Alltså

$$3(1-2t)-(2+t)+(1+t) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow t = \frac{1}{3},$$

d.v.s. linjen skär planet i punkten $\left(1-\frac{2}{3}, 2+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Svar: Linjen skär planet i punkten $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

b) Vi konstaterar att origo, *O*, ligger i det givna planet, och ritar en figur (skiss) där vi har planets normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Vi söker avståndet mellan Q och P, d.v.s. $|\overrightarrow{QP}|$. Om vi låter $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ får vi

$$|\overrightarrow{QP}| = |\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}}|$$

Vi har av projektionsformeln att

$$\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \cdots = \frac{4}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så sökt avstånd är

$$\left|\frac{4}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{11}\sqrt{9+1+1} = \frac{4}{11}\sqrt{11} \text{ l. e.}$$

Svar: $\frac{4}{11}\sqrt{11}$ l. e.

3. a) Eftersom $-2+2i\sqrt{3}$ har beloppet $\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$, kan det skrivas

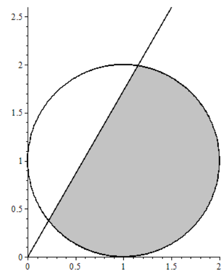
$$-2+2i\sqrt{3}=4\left(\underbrace{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\substack{\text{argument}=\frac{2\pi}{3}\\ \text{belopp}=1}}\right)=4e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

och vi får alltså

$$\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^{25}=\left(4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{25}=4^{25}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{25}=4^{25}e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 25}=4^{25}e^{i\frac{50\pi}{3}}=4^{25}e^{i\left(16\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}=$$

$$=4^{25}e^{i\frac{2\pi}{3}}=4^{25}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{49}+2^{49}i\sqrt{3}$$

Svar: $-2^{49}+2^{49}i\sqrt{3}$



b)$|z-(1+i)|\leq 1$ innebär alla z på en cirkelskiva med radie 1 och medelpunkt i $1+i$. $0\leq \arg z\leq \frac{\pi}{3}$ innebär alla z mellan strålarna $\theta=0$ och $\theta=\frac{\pi}{3}$. Båda villkoren gäller därmed för alla z inom och på randen av det skuggmarkerade området i figuren.

4. a) Se kursboken.
b)

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin x\Leftrightarrow[\text{se a)}-\text{uppgiften}]\Leftrightarrow\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin(-x)\Leftrightarrow$$
$$3x-\frac{\pi}{3}=-x+n\cdot 2\pi \text{ eller } 3x-\frac{\pi}{3}=\pi-(-x)+n\cdot 2\pi\Leftrightarrow$$
$$4x=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \text{ eller } 2x=\frac{\pi}{3}+\pi+n\cdot 2\pi\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{\pi}{2} \text{ eller } x=\frac{2\pi}{3}+n\pi$$

Svar: $x=\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$ eller $x=\frac{2\pi}{3}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$

5. a) Ekvationens termer är alla definierade om $x\in\,]-2,\infty[\,\cap\,]3,\infty[\,=\,]3,\infty[\,=D_{\text{ekv}}$
Alltså:

$$\ln(x+2)+\ln(x-3)=0, x>3\Leftrightarrow$$

$$\ln\big((x+2)(x-3)\big)=0, x>3\Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2-x-6)=\underbrace{\ln 1}_{=0}, x>3\Leftrightarrow[\text{ty ln är en omvändbar funktion}]$$

$$x^2-x-6=1, x>3\Leftrightarrow x^2-x-7=0, x>3\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Vi har $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{6}{2}=3$, så $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\in D_{\text{ekv}}$.

Anm: Roten $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}$ duger inte ty $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{25}}{2}=-2\leq 3$, d.v.s. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\notin D_{\text{ekv}}$.
Svar: $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}$**.**

b)

$$e^{2x}-e^x>6\Leftrightarrow[\text{Låt } t=e^x>0]\Leftrightarrow t^2-t-6>0, t>0\Leftrightarrow$$

$$(t+2)(t-3)>0, t>0\Leftrightarrow t>3\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow x>\ln 3$$

Svar: $x>\ln 3$

6. Vi skall visa att påståendet $P(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ gäller för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bevismetod: Induktion

Steg I

$V(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ $\qquad H(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Alltså har vi $V(1) = H(1)$, d.v.s. $P(1)$ gäller.

Steg II

Vi antar att $P(p)$ gäller för ett godtyckligt $p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. vi antar att $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$,

vilket leder till att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)((p+1)+1)} \underbrace{\overset{*}{=}}_{\text{Enligt antagandet}} \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{(p+1)+1} = H(p+1)$$

Alltså: $V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$ d.v.s. om $P(p)$ gäller så gäller även $P(p+1)$.

Steg III

Påståendet gäller enligt I för $n=1$. Enligt II gäller det då även för $n = 1+1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2+1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, v.s.v.

7. Vi undersöker definitionsområdena för ekvationens respektive led.

VL:

$\arccos(x^2+2x-2)$ är definierat $\Leftrightarrow -1 \le x^2+2x-2 \le 1$. Vi undersöker först vänstra och högra olikheten var för sig.

Vänstra olikheten:

$$-1 \le x^2+2x-2 \Leftrightarrow x^2+2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(x-(-1+\sqrt{2})\right)\left(x-(-1-\sqrt{2})\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

(gör teckenstudium)

$$x \in \left]-\infty, -1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2}, \infty\right[$$

Högra olikheten:

$$x^2+2x-2 \le 1 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow$$

(gör teckenstudium)

$$x \in [-3,1].$$

Båda olikheterna är således uppfyllda för $x \in \left[-3, -1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2}, 1\right]$, vilket alltså är arccosfunktionens definitionsmängd = D_{VL}.

HL:

$\ln(x-1)$ är definierat för $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, d.v.s. vi har $D_{HL} =]1, \infty[$.

Vi ser nu att $D_{VL} \cap D_{HL} = \varnothing$, vilket innebär att ekvationen saknar lösning.

Svar: Ekvationen saknar lösning.