TENTAMEN

Datum:	24 augusti 2017
Tid:	8-12
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Marcus Posada, 011-363564
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

Ett företag tillverkar vegetabilisk olja som används i olika typer av livsmedelsframställning. Tillverkningen sker i någon av företagets två fabriker (F), och den färdiga oljan transporteras sedan till någon av de två depåerna (D), för att sedan distribueras till någon av de tre kunderna (K). Transportkostnaderna (per 1000 liter) mellan fabrikerna och depåerna ges i Tabell 1, samt mellan depåerna och kunderna i Tabell 2. Respektive fabriks oljeproduktionskapacitet och efterfrågan hos respektive kund för den kommande månaden ges i Tabell 3, där den totala kapaciteten är lika med den totala efterfrågan. Varje depå kan maximalt hantera 3 000 000 liter olja per månad.

Tabell 1 Transportkostnad i SEK per 1000 liter olja, mellan depå (D) och fabrik (F)

	F1	F2
D1	1,50	1,20
D2	1,20	2,00
D3	1,30	1,90

Tabell 2 Transportkostnad i SEK per 1000 liter olja, mellan depå (D) och kund (K)

	K1	K2	K3
D1	2,10	3,20	4,90
D2	2,30	2,00	3,30
D3	2,00	2,10	3,10

Tabell 3 Tillgång, efterfrågan och kapacitet, i 1000-liter olja

Fabrik	F1	F2	
Kapacitet	2 400	3 500	
Kund	K1	K2	K3
Efterfrågan	700	1 900	3 300

Formulera förtagets kostnadsminimeringsproblem som en LP-modell med variabeldefinition, målfunktion och bivillkor.

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar fyra olika produkter (1, 2, 3, 4) på vid olika maskiner (A och B). Tiden det tar att tillverka en enhet av respektive produkt på respektive maskin, samt vinsten av varje såld produkt ges nedan.

		Maskintid (i min)		Vinst (i kr)
		A	B	
Produkt	1	10	27	10
	2	12	19	12
	3	13	33	17
	4	8	23	8

Produkt 1 måste gå igenom både maskin A *och* B, medan övriga produkter kan tillverkas i maskin A *eller* B. Fabriken där tillverkningen sker är liten och har en begränsad yta. En veckas produktion lagras på 50 kvadratmeter och ytan som tas upp av varje produkt är 0.1, 0.15, 0.5 och 0.05 (kvadratmeter) för varje enhet av respektive produkt 1, 2, 3 and 4. Krav från kunder gör att exakt dubbelt så många enheter av produkt 2 måste tillverkas jämfört med produkt 3. Över en vecka finns 1800 minuter (30h) maskintid tillgänglig i maskin A och 2100 minuter (35h) i maskin B.

Företagets problem att för varje vecka maximera vinsten kan formuleras som:

x_i : antal enheter per vecka av produkt i som produceras i maskin $A, i = 1,2,3,4$

y_i : antal enheter per vecka av produkt i som produceras i maskin $B, i = 2,3,4$

$$\max z = 10x_1 + 12(x_2 + y_2) + 17(x_3 + y_3) + 8(x_4 + y_4)$$

då

$$0.1x_1 + 0.15(x_2 + y_2) + 0.5(x_3 + y_3) + 0.05(x_4 + y_4) \le 50 \quad \text{(lagringsyta)}$$
$$x_2 + y_2 - 2(x_3 + y_3) = 0 \quad \text{(kundkrav)}$$
$$10x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 8x_4 \le 1800 \quad \text{(tillgång till tid i maskin A)}$$
$$27x_1 + 19y_2 + 33y_3 + 23y_4 \le 2100 \quad \text{(tillgång till tid i maskin B)}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4 \ge 0$$

Modellen har lösts, med AMPL/CPLEX och utdata finns på nästa sida.

Utgå från känslighetsanalysen på nästa sida och besvara följande frågor:

a) Genom att låta de anställda jobba övertid kan företaget få mer tillgänglig tid i maskin A eller B. Företaget måste välja en av maskinerna som ska gå på övertid. Kostnaden är 1000 kr, och för detta pris erhålls 100 extra produktionstimmar. Vilken, om någon, maskin bör man välja? (2p)

b) Hur mycket måste vinsten för produkt 1 öka för att det ska bli intressant att tillverka denna produkt? (1p)

c) Ange minsta möjliga intervall för förändringen av målfunktionsvärdet om man får tillgång till 10 kvadratmeter extra lagringsutrymme. (2p)

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 3327.14329
5 dual simplex iterations (2 in phase I)

z = 3327.14

: _varname    _var       _var.rc     :=
1   x1        0           -10.0324
2   x2        0           -3.92699
3   x3        51.9237      0
4   x4        140.624      0
5   y2        107.422      0
6   y3        1.78734      0
7   y4        0           -0.922448
;

: _varname   _var.down   _var.current   _var.up    :=
1   x1        -1e+20       10            20.0324
2   x2        -1e+20       12            15.927
3   x3        10.9437      17            18.2816
4   x4        7.21134      8             11.727
5   y2        7.68332      12            55.5
6   y3        15.6993      17            24.4974
7   y4        -1e+20       8             8.92245
;

:   _conname     _con.slack    _con.dual   :=
1   lagringsyta    0            20.8422
2   kundkrav      -3.9968e-15   2.36383
3   tid_maskin_A   0            0.869736
4   tid_maskin_B   0            0.342623
;

:   _conname     _con.down  _con.current   _con.up     :=
1   lagringsyta    34.912      50           50.9704
2   kundkrav      -160.38      0            4.63472
3   tid_maskin_A   1644.74     1800         4214.08
4   tid_maskin_B   2048.7      2100         3439.06
```

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{då} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \le 12 \\
& 2x_1 + 2x_3 \ge 5 \\
& 4x_1 + x_2 \le 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

med optimalt målfunktionsvärde z^*.

a) Antag att högerledet i bivillkor 2 ökar och att det nya problemet ger ett optimalt målfunktionsvärde z_{NY}^*. Ange relationen (=,≤,≥) mellan z^* och z_{NY}^*. *Motivera!* (1p)
b) Antag att x_2 får ett heltalskrav och att det nya problemet ger ett optimalt målfunktionsvärde z_{NY}^*. Ange relationen (=,≤,≥) mellan z^* och z_{NY}^*. *Motivera!* (1p)
c) Visa att lösningen x = x = $(1,1,2)^T$ inte kan vara en optimallösning för en godtyckligt vald målfunktion som innehåller x_1, x_2 och x_3. (1p)
d) Formulera dualen till problemet. (1p)
e) Formulera om problemet på standardform. (1p)

(5p) Uppgift 4

Betrakta nedanstående minimeringsproblem, och den optimala simplextablån för problemet.

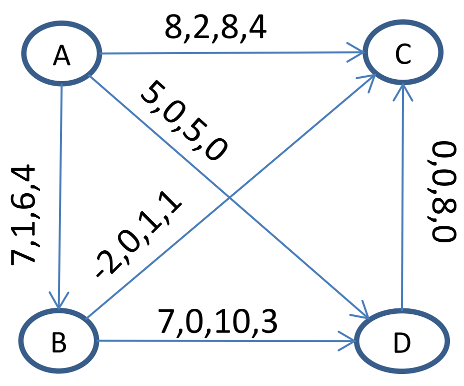
$$\begin{aligned}
\min z &= -2x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{då} \quad & x_2 + 2x_3 \le 10 \\
& 4x_1 - 2x_3 \ge 3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

basvar/var	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	0	-1	-4	0	0	-2	-18
s_1	0	0	1	2	1	0	0	10
x_1	0	1	1	1	0	0	1	9
s_2	0	0	4	6	0	1	4	33

a) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för x_2 är lösningen ovan den optimala? (1p)
b) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för x_1 är lösningen ovan den optimala? (2p)
c) Antag istället att det är ett maximeringsproblem som löses. Utgå från tablån ovan som inte längre beskriver en optimallösning. Vilken variabel blir inkommande variabel i nästa simplexiteration och vilken blir utgående? (2p)

(5p) Uppgift 5

Betrakta nätverket nedan. Varje båge har kostnad, undregräns, övregräns och aktuellt flöde (i den ordningen) markerat.



Notera att b- och c-uppgiften nedan kan lösas oberoende av om a-uppgiften lösts korrekt.

a) Ange nodstyrkorna i nätverket. (1p)
b) Ta fram ett basträd tillhörande nodpriser. (1p)
c) Lösningen är inte optimal. Genomför en iteration med simplexmetoden för minkostnadsflödesproblem. Dvs. bestäm inkommande och utgående basbåge samt avgör om den nya lösningen är optimal. (3p)