# Tentamen i TMME32 Mekanik fk för Yi

**Tentamensdatum:** 2018-03-15 kl. 14-19.

**Examinator:** Lars Johansson.

**Jourhavande:** Lars Johansson. Telefon 013-281120. Besöker tentamenslokalen kl. 15 och 16.30.

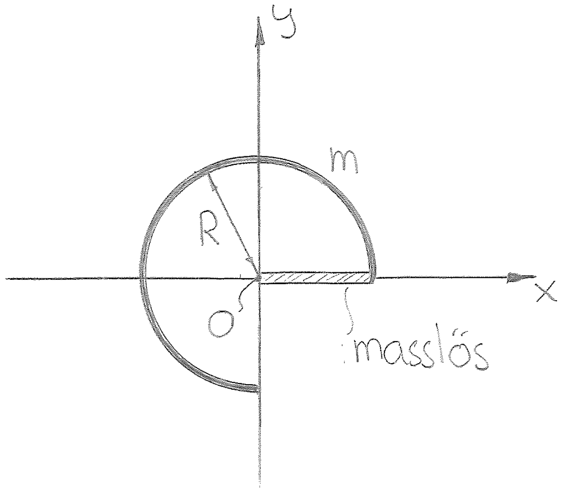
**Hjälpmedel:** Ritverktyg samt ett A4-blad (båda sidor) med anteckningar handskrivna i original (ej fotokopia). Ej miniräknare. Ej tabeller.

Tentamen består av tre sidor (inklusive denna) med fyra uppgifter som kan ge totalt tolv poäng. För godkänt krävs fem poäng.

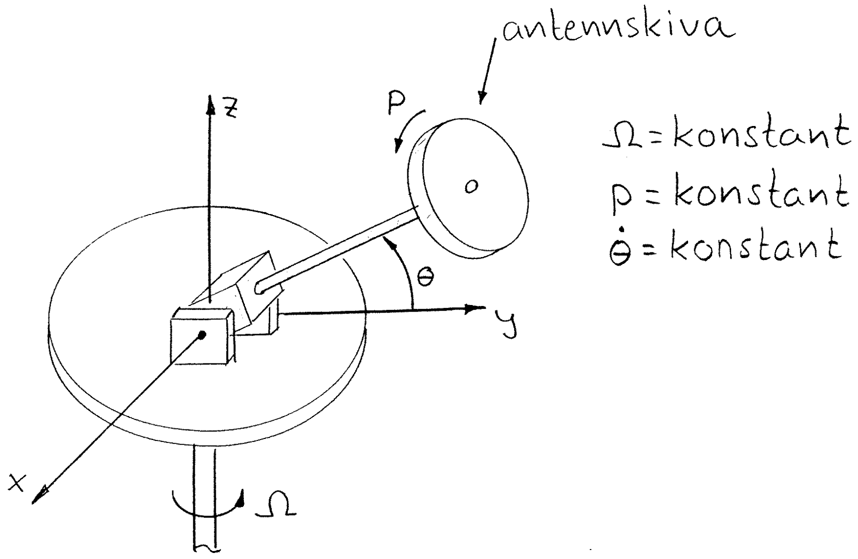
Svar anslås på kurshemsidan. Rättningsgranskning sker på IEI:s studerandeexpedition, ingång 19C. Eventuella klagomål skall vara skriftliga (ej e-post). Kursadministratör: Lena Sundling, 013-281106, lena.sundling@liu.se

**Instruktioner:**

- Rita tydliga figurer. Det är tillåtet att använda röd penna i figurer, men undvik detta i övrigt.
- Definiera införda storheter och motivera uppställda ekvationer.
- Kontrollera svarens dimension och rimlighet.
- Skriv bara på ena sidan av pappret och lös inte mer än en uppgift på samma papper.

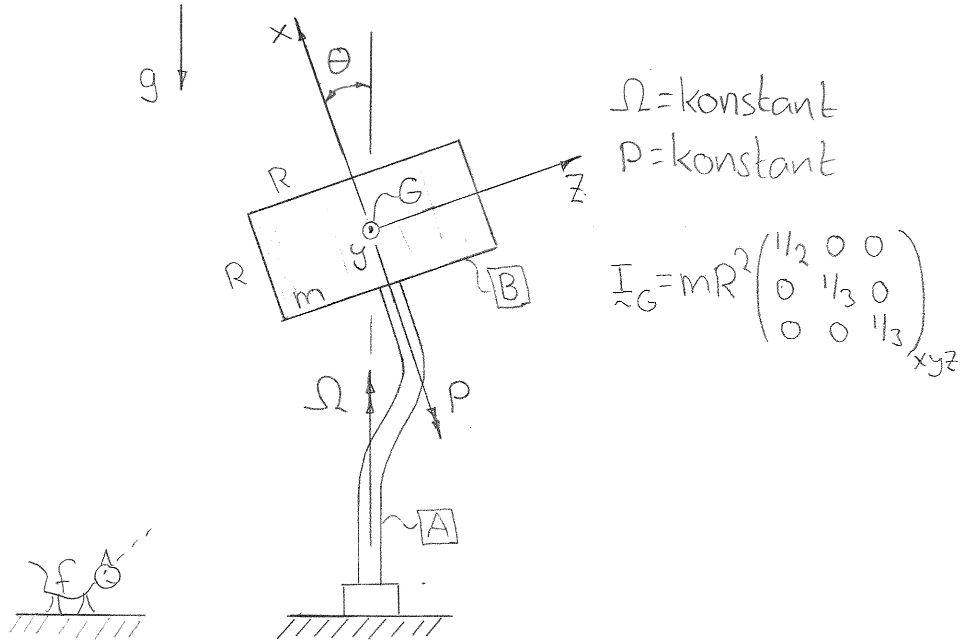



1) En tunn jämntjock tråd är böjd till trekvartscirkelform enligt figuren. Beräkna genom integration tröghetsprodukten $I_{xy}$, avseende koordinatsystemets origo. Du kan komma att ha användning för sambandet $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ (3p).

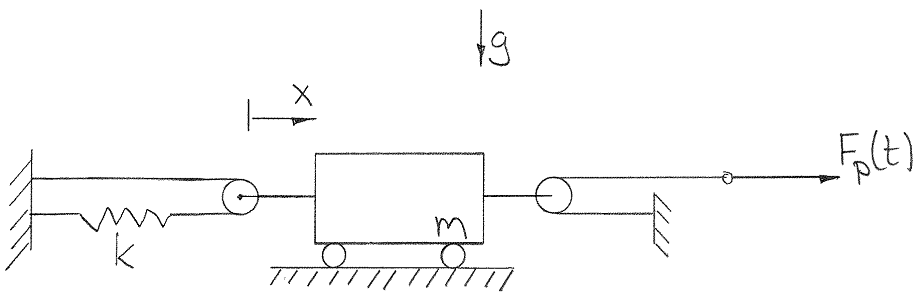



2) Satellit-antennen i figuren ges en rörelse genom tre vinkelhastigheter: $\Omega$ är plattans rotation relativt fasta marken, $\dot{\theta}$ är kubens rotation relativt plattan, och $p$ är antennskivans rotation relativt kuben. Beräkna vinkelaccelerationsvektorn för antennskivan. Räkna i ett koordinatsystem som sitter fast i plattan (och alltså följer $\Omega$ men inte övriga rotationer) (3p).

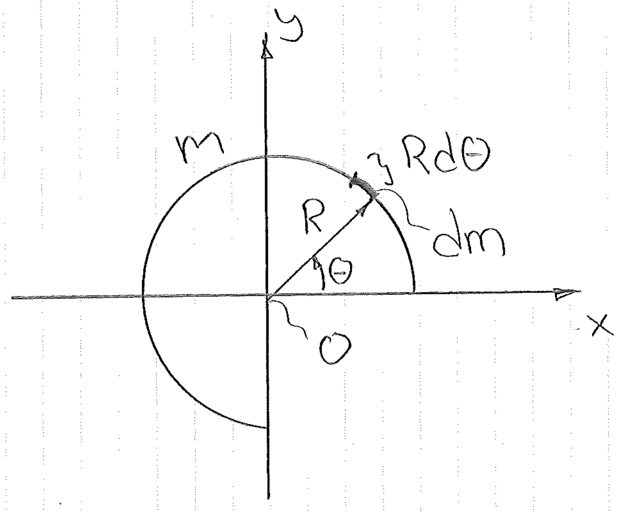
*Ledning:* $\Omega$- och $\dot{\theta}$-rotationerna är kring koordinataxlar, $p$-rotationen är kring en axel som ändrar riktning i $yz$-planet.




3) Hållaren $A$ roterar med $\Omega$=konstant relativt fasta marken kring en lodrät axel. Cylindern $B$ roterar med $p$=konstant relativt hållaren, kring sin rotationssymmetriaxel. Beräkna förhållandet $p/\Omega$ så att det inte överförs något kraftparsmoment från hållaren på cylindern vid masscentrum $G$ (3p).




4) Massan i figuren är via snören och trissor förbunden med en fjäder och en pålagd kraft. Den pålagda kraften $F_p(t)$ är sådan att snörena hela tiden är sträckta. Koordinaten $x$ är noll då fjädern är ospänd. Snören, trissor och fjäder är masslösa, och det finns ingen friktion. Teckna rörelseekvationen för massan och ange egenvinkelfrekvensen (3p).




Beräkna $I_{O,xy}$.

$$I_{O,xy} = \int xy\,dm = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} R\cos\theta R\sin\theta\,dm \quad (1)$$

$$dm = \frac{\text{masselementets längd}}{\text{hela längden}} \cdot \text{hela massan} =$$

$$= \frac{Rd\theta}{\frac{3}{4}2\pi R} m = \frac{2m}{3\pi} d\theta \quad (2)$$

(1) o (2):

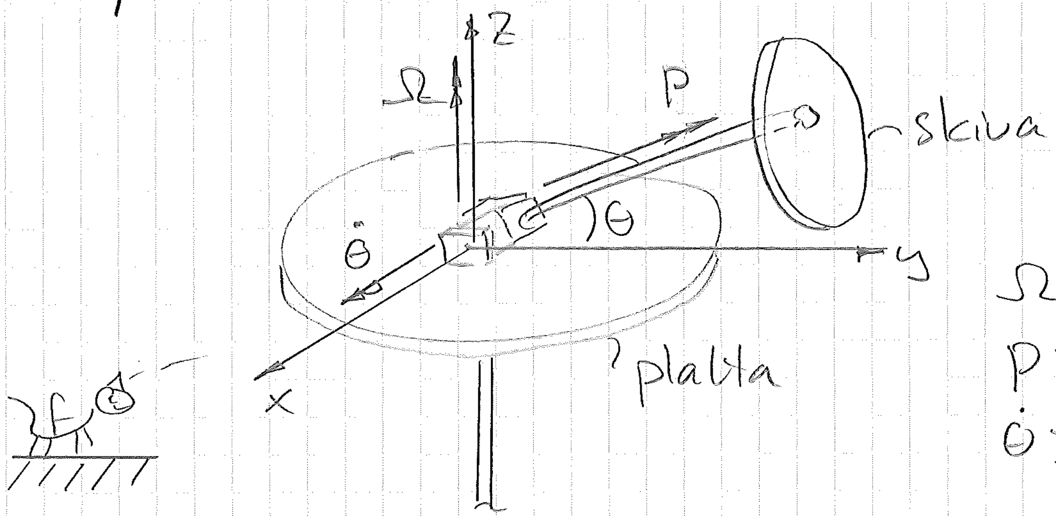
$$\underline{I_{O,xy}} = R^2 \frac{2m}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = R^2 \frac{2m}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= R^2 \frac{2m}{3\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = R^2 \frac{2m}{3\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1+1) =$$

$$= \underline{\frac{mR^2}{3\pi}} \quad \underline{\text{svar}}$$

Anm Resultatet blir samma om man integrerar från noll till $\pi/2$. Delen från $\pi/2$ till $3\pi/2$ ger inget bidrag vilket även följer av att xz är ett symmetriplan för den delen.

180315-2) 




$\Omega$ = konst.
p = konst.
$\dot\theta$ = konst

Beräkna vinkelacc. för skivan.
Låt koord sitta fast i plattan, dvs.

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_{xyz} \quad \text{plattans rot.}$$

Ur figur:

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ p\cos\theta \\ \Omega + p\sin\theta \end{pmatrix}_{xyz} \quad \text{skivans rot.}$$

Derivera $\underline{\omega}$ mha. Coriolis ekv.

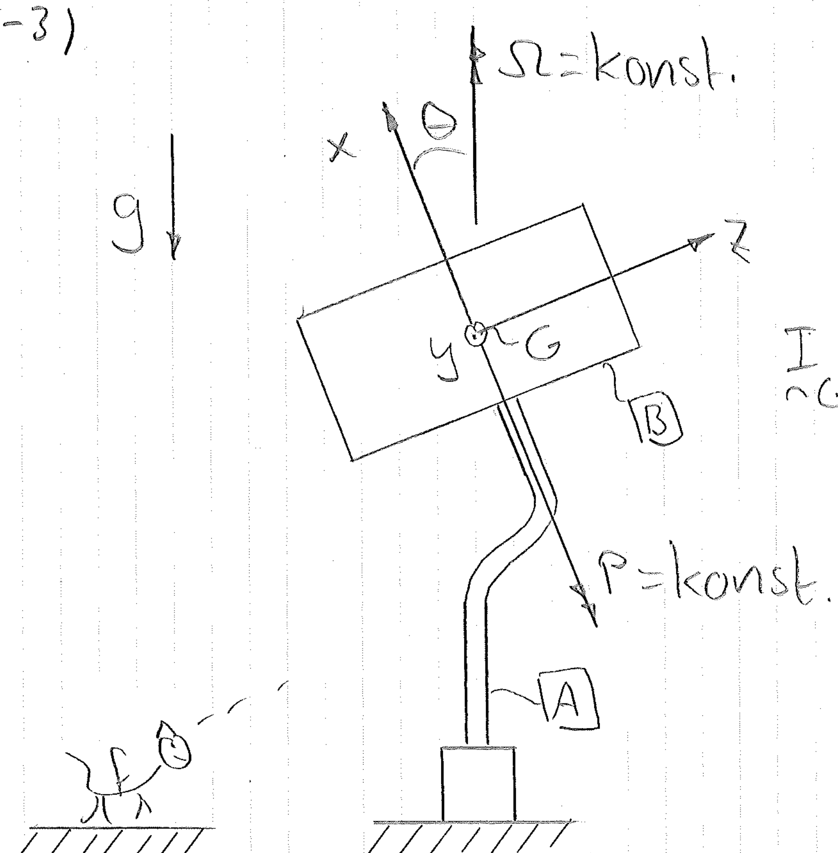
$$\underline{\alpha} = \frac{d}{dt}\Big|_f \underline{\omega} = \frac{d}{dt}\Big|_{xyz} \underline{\omega} + \underline{\Omega} \times \underline{\omega} =$$

$$= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot\theta \\ p\cos\theta \\ \Omega + p\sin\theta \end{pmatrix}_{xyz} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_{xyz} \times \begin{pmatrix} \dot\theta \\ p\cos\theta \\ \Omega + p\sin\theta \end{pmatrix}_{xyz} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\Omega p\cos\theta \\ -p\dot{\theta}\sin\theta + \Omega\dot{\theta} \\ p\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}_{xyz} = \underset{\sim}{\alpha}$$

<u>Svar</u>

180315-3) (1)




$$\underset{\sim G}{I} = mR^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}_{xyz} \quad (1)$$

Beräkna $P/\Omega$ så att momentet på cyl. B vid G är noll.

Ur figur

$$\underset{\sim}{\omega}^{A/f} = \begin{pmatrix} \Omega\cos\theta \\ 0 \\ \Omega\sin\theta \end{pmatrix}_{xyz} \quad (2) \quad \text{hållarens rot.}$$

$$\underset{\sim}{\omega}^{B/A} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{xyz} \quad (3) \quad \text{cyl. relativa rot}$$

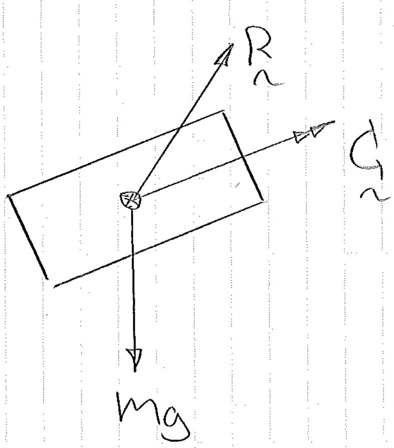
$$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{\omega}^{A/f} + \underset{\sim}{\omega}^{B/A} = \begin{pmatrix} \Omega\cos\theta - P \\ 0 \\ \Omega\sin\theta \end{pmatrix}_{xyz} \quad (4) \quad \text{cyl. rot. rel. f}$$

Låt koord. rot. vara

$$\underset{\sim}{\Omega} = \underset{\sim}{\omega}^{A/f} = \begin{pmatrix}\Omega\cos\theta\\ 0\\ \Omega\sin\theta\end{pmatrix}_{xyz} \quad (5) \quad \underline{\text{koord. rot.}}$$

så är $\underset{\sim}{I}_G$ = konstant o (4), (5) gäller alla lägen.

Frilägg o teckna rörelseekv.




$$\sum \underset{\sim}{M}_G = \frac{d}{dt}\Big|_{\text{inertial}} \underset{\sim}{L}_G \; : \quad \underset{\sim}{C} = \frac{d}{dt}\Big|_f \underset{\sim}{L}_G = \frac{d}{dt}\Big|_{xyz}(\underset{\sim}{I}_G\underset{\sim}{\omega}) + \underset{\sim}{\Omega}\times(\underset{\sim}{I}_G\underset{\sim}{\omega}) =$$

$$= mR^2\frac{d}{dt}\cancel{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\Omega\cos\theta - \frac{1}{2}p\\ 0\\ \frac{1}{3}\Omega\sin\theta\end{pmatrix}_{xyz}} + mR^2\begin{pmatrix}\Omega\cos\theta\\ 0\\ \Omega\sin\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\Omega\cos\theta - \frac{1}{2}p\\ 0\\ \frac{1}{3}\Omega\sin\theta\end{pmatrix}_{xyz} =$$

$$= mR^2\begin{pmatrix}0\\ \Omega^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\Omega p\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}_{xyz} = \underset{\sim}{C}$$

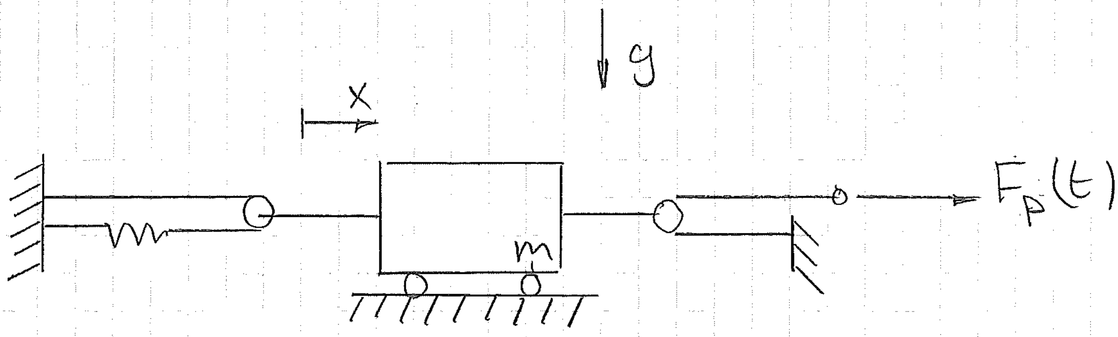
$\underset{\sim}{\dot{c}} = \underset{\sim}{0}$ enl. förutsättn. så

$$\Omega^{\cancel{2}} \cancel{\sin\theta} \cos\theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \cancel{\Omega} p \cancel{\sin\theta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p/\Omega = \frac{\cos\theta}{3}$$ svar

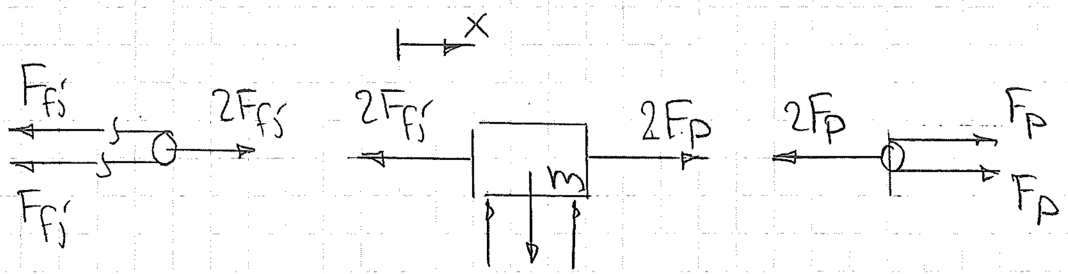
Villkoret uppfylls även då $\Omega = 0$ och då $\theta = 0$.

180315-4) (1)



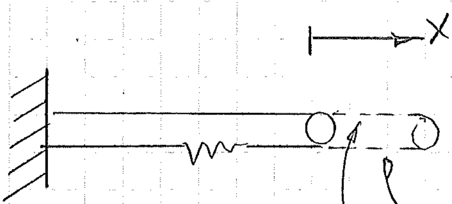

Teckna rörelseekvationen. Bestäm egenvinkelfrekvensen.

Frilägg & teckna rörelseekv.




$\xrightarrow{x}: \ -2F_{Fj} + 2F_p = m\ddot{x}$ (1)

$F_{Fj} = k \cdot \text{förlängning} = k2x$ (2)




tråden dras ut 2x!

(1) & (2) ger

$$-4kx + 2F_p = m\ddot{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x} + \underbrace{\frac{4k}{m}}_{=\omega_e^2}x = \frac{2}{m}F_p(t)} \qquad \underline{\text{svar}}$$

$$\underline{\omega_e = \sqrt{\frac{4k}{m}}} \qquad \underline{\text{svar}}$$