TNSL05 – Övningsuppgifter modellering

Lösningsförslag

1) Ett företag tillverkar och säljer två olika typer av bord. Grundversionen, med skiva i trä, tar 0.6 timmar att sätta ihop, har fyra ben och säljs med 1500 kr i vinst. Lyxversion, med en skiva i glas, tar 1.5 timmar att sätta ihop, har fem ben och säljs med 3000 kr i vinst. För nästa vecka har företaget 300 ben, 50 träskivor, 35 glasskivor och 43 arbetstimmar tillgängliga.

a) Formulera företagets problem att bestämma en produktionsplan för nästa vecka som maximerar vinsten som ett linjärt optimeringsproblem.

b) Företaget kan under nästa vecka ta in extra arbetskraft motsvarande 20 arbetstimmar, till den extra kostnaden 50kr per timma. Formulera om din befintliga modell (fortfarande som ett linjärt optimeringsproblem) för att även kunna bestämma hur många timmar med extra arbetskraft som behövs.

a)

Variabel definition:

x_G: antal tillverkade bord av grundversionen, x_L: antal tillverkade bord av lyxversionen

$\max z = 1500x_G + 3000x_L$

Då

$x_G \leq 50$ (max antal träskivor)

$x_L \leq 35$ (max antal glasskivor)

$4x_G + 5x_L \leq 300$ (max antal ben)

$0.6x_G + 1.5x_L \leq 43$ (max tid)

$x_G \geq 0, x_L \geq 0$

b)

Variabel definition:

x_G: antal tillverkade bord av grundversionen, x_L: antal tillverkade bord av grundversionen

y: antal timmar utnyttjad extra arbetskraft

$\max z = 1500x_G + 3000x_L - 50y$

Då

$x_G \leq 50$ (max antal träskivor)

$x_L \leq 35$ (max antal glasskivor)

$4x_G + 5x_L \leq 300$ (max antal ben)

$0.6x_G + 1.5x_L - y \leq 43$ (max tid)

$y \leq 20$ (max extra arbetskraftstid)

$x_G \geq 0, x_L \geq 0, y \geq 0$

2) En produktionsprocess ger x_i enheter av en produkt i en given tidsperiod i till en kostnad av $f_i(x_i)$. I slutet av varje period säljs d_i enheter och lagerhållningskostnaden är $c_i(y_i)$ där y_i är det utgående lagret efter tisdperiod i. Produktionen kan ej överstiga P i en tidsperiod och lagret i en tidsperiod får ej överstiga L. Ingångslagret i tidsperiod 1 är noll, dvs. y_0.

Formulera problemet att minimera totalkostnaden över n tidsperioder. Definiera noggrant de variabler som används, och ange också vilka parametrar ni använder er av.

Variabeldefinition:

x_i: antal enheter av en produkt i en given tidsperiod *i, i=1…n*

y_i: utgående lagret efter tidsperiod *i, i=1…n*

Parametrar:

d_i: försäljning period *i, i=1…n*

P: max produktion, *L:* max lager, y_0: ingående lager i tidsperiod *i*

Kostnadsfunktioner:

$f_i(x_i)$: kostnad att tillverka x_i enheter av en produkt i en given tidsperiod *i, i=1…n*

$c_i(x_i)$: kostnad att lagerhålla x_i enheter av en produkt i en given tidsperiod *i, i=1…n*

$\min z = \sum_{i=1}^{n}(f_i(x_i)+c_i(y_i))$

då

$y_{i-1} + x_i - d_i - y_i = 0, i = 1 \dots n$ (lagerbalansvillkor, summa lager föregående tidsperiod + produktion innevarande tidsperiod - försäljning innevarande period = ingående lager nästa period)

$x_i \leq P, i = 1 \dots n$ (max produktion)

$y_i \leq L, i = 1 \ldots n$ (max lager)

$x_i, y_i \geq 0, i = 1 \ldots n$

3) I ett produktionsplaneringsproblem har man deklarerat variabeln I_{jt} som den kvantitet av produkt $j = 1, \ldots, n$ som finns i lager i slutet av tidsperiod *t*. Låt oss anta att det går åt lagerytan v_j att lagra en enhet av produkt *j*. Formulera bivillkor som uttrycker att den sammanlagda lageryta som används i slutet av någon av tidsperioderna $t = 1, \ldots, T$ inte överskrider *A*.

$$\sum_{j=1}^{n} v_j I_{jt} \leq A, t = 1 \ldots T$$

4) Ett fraktflygplan har tre skilda utrymmen där varor kan fraktas: främre, mitten och bakre. Dessa tre utrymmen har följande begränsningar avseende vikt och volym:

Utrymme	Viktkapacitet(ton)	Volymkapacitet (kubikmeter)
Främre	5	68
Mitten	16	87
Bakre	8	100

Följande två varor är tillgängliga att skicka med nästa flygning:

Vara	Vikt (ton)	Volym (kubikmeter/ton)	Vinst (kr/ton)
C1	18	12	3100
C2	15	20	3800

Det är möjligt att välja att endast skicka en del av den totala tillgången av en vara och varje vara kan dessutom delas upp och lastas i flera olika utrymmen. Problemet är att bestämma *hur mycket* av varje vara C1 och C2 som ska lastas samt hur varorna ska vara *fördelade* mellan de olika utrymmena så att den totala vinsten av den kommande flygningen maximeras.

a) Formulera problemet som ett linjärt optimeringsproblem
b) För att tillåtas att lyfta måste flygplanet vara väl balanserat. Därför måste proportionen mellan vikten på de lastade varorna och viktkapaciteten i respektive utrymme vara lika för samtliga tre utrymmen. Gör tillägg till modellen så att detta villkor uppfylls.

Variabel definition:

x_i: antal ton av C_1 som lastas i utrymme *i, i=främre (f), mitten (m), bakre (b)*

y_i: antal ton av C_2 som lastas i utrymme *i, i=främre (f), mitten (m), bakre (b)*

Målfunktion:

$$\max 3100(x_f + x_m + x_b) + 3800(y_f + y_m + y_b)$$

Bivillkor:

(vikt)

$x_f + y_f \leq 5$

$x_m + y_m \leq 16$

$x_b + y_b \leq 8$

(volym)

$12x_f + 20y_f \leq 68$

$12x_m + 20y_m \leq 87$

$12x_b + 20y_b \leq 100$

(tillgång)

$x_f + x_m + x_b \leq 18$

$y_f + y_m + y_b \leq 15$

(Icke-negativitet)

$x_i \geq 0$, *i* = f,m,b

$y_i \geq 0$, *i* = f,m,b

(uppgift b)

$$\frac{x_f + y_f}{5} = \frac{x_m + y_m}{16}$$

$$\frac{x_f + y_f}{5} = \frac{x_b + y_b}{8}$$

5) En pub som håller på att öppnas ska anställa personal. Nyckelbefattningarna är redan klara men man behöver anställa minst 5 personer ytterligare (fasta heltidstjänster) för att klara den dagliga driften. Totalt har man fått in 10 sökande som är listade tillsammans med sin begärda månadslön (i tusentals kronor). Dessutom är de tre kompetensområdena kock, ölkunskap och bartender markerade för varje person. K=Kockutbildning, Ö=Diplomerad ölkännare, B=Utbildad bartender.

Lösning: gör följande tillägg till modellen

1) $x_A + x_D + x_F + x_G + x_I + x_J \geq 1$ (B)
   $x_B + x_E + x_I + x_J \geq 1$ (K)
   $x_B + x_C + x_G + x_H \geq 1$ (Ö)
2) $x_B + x_G \leq 1$
3) $x_B \geq x_E$
4) y=1 om endast en bartender anställs, 0 annars (ny variabel)
   y$\geq 2 - (x_A + x_D + x_F + x_G + x_I + x_J)$ (nytt villkor)
   $\min q = z + 2y$ (ändrad målfunktion)

6) Inga ytterligare variabler eller parametrar behöver definieras för att lösa dessa uppgifter.

a) Formulera bivillkor som säkerställer att en kanal inte planerar att visar flera idrotter under samma tidsperiod. (3p)
b) Det är tillåtet att endast visa en del av en idrott, men en idrott som man har börjat visa måste man fortsätta visa för alla återstående tidsperioder som den pågår under (dock inte nödvändigtvis i samma kanal). Lägg till bivillkor som säkerställer att detta krav uppfylls. *För att exemplifiera kravet kan vi ta fallet då vi väljer att börja sända bordtennis från kl 16, vilket är tillåtet, men detta medför då att man måste sända bordtennisen ända fram till kl 18.* (3p)

Lösning:

a) $\sum_{i=1}^{12} x_{ijk} \leq 1, j = 1, \ldots, 10, k = A, B$

b) $x_{ijA} + x_{ijB} \geq b_{ij}(x_{i,j-1,A} + x_{i,j-1,B})\ i = 1, \ldots, 12, j = 2, \ldots, 10$

Uppgift 7.

Ett företag som konserverar och säljer frukt har två fabriker, A respektive B. Produktionskapaciteten är 450 respektive 550 ton, och arbetskostnaden är 250 kr/ton respektive 200 kr/ton. Tre fruktodlare erbjuder 300, 700 respektive 500 ton färsk frukt till ett pris av 100, 90 respektive 80 kr/ton. 1 ton frukt blir i fabriken till 1 ton konserverad frukt. Transportkostnaden (kr/ton) mellan fruktodlarna och fabrikerna ges av följande tabell:

	Till Fabrik A	**Till Fabrik B**
Från odlare 1	20	25
Från odlare 2	10	15
Från odlare 3	50	30

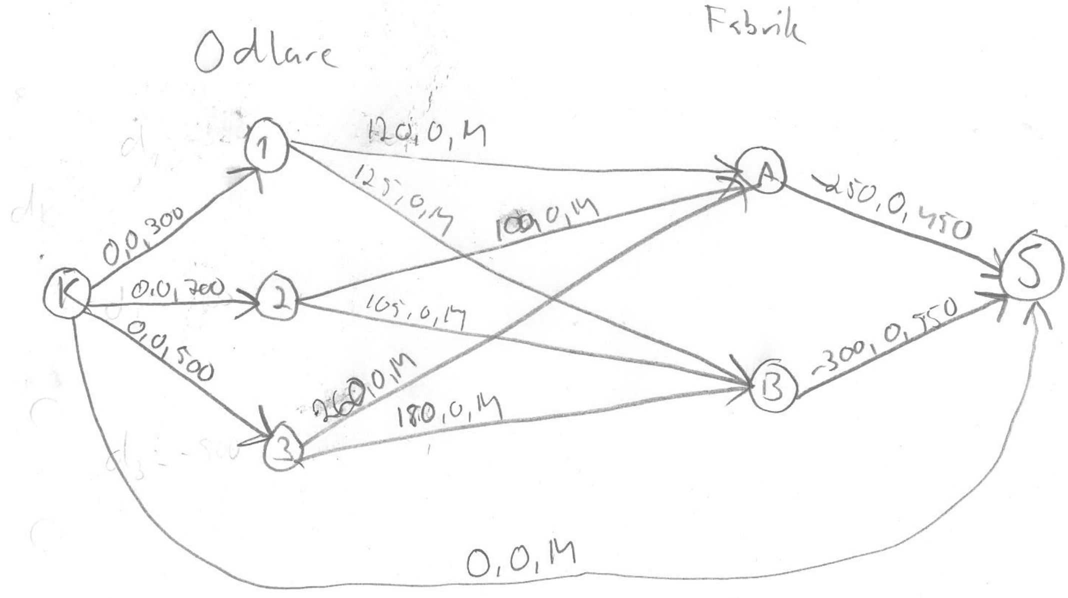
Den konserverade frukten säljs för 500 kr/ton.

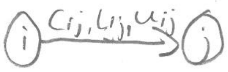
Företaget kan sälja allt som produceras. Formulera företagets problem att maximera vinsten, som ett minkostnadsflödesproblem. Rita nätverket och ange nod- och bågdata. Lös ej!

Kommentarer till lösningen.

Kostnad på bågar mellan odlare och kund består av både transportkostnad och fruktpris. Kostnad på båge mellan fabrik och nod K är arbetskostnad minus vinst. Dvs. negativ kostnad = att en vinst uppstår per ton frukt. Flöde på båge mellan K och S tolkas som frukt som företaget inte är intresserad av att köpa. Antingen pga. att den totala vinsten blir mindre än 0 eller pga. kapaciteten i fabrikerna är använd. Tänk på att vinst är lika med negativt kostnad i detta problem, dvs. att det står 0 på båge mellan K och S gör att flöde som ej kan skickas genom övriga nätverket med negativ kostnad istället skickas på båge K till S i en tänkt optimallösning.

M används för att beskriva ett väldigt högt värde.





x_{ij} = flöde på båge i -> j beskriver mängd frukt i ton som transporteras från odlare i till fabrik j, $i = 1,2,3$ $j = A, B, C$

$d_K = -1500$

$d_S = +1500$

övriga noder är mellannoder med styrka 0

Uppgift 8.

a) Företaget Bilsprit tillverkar fordonsetanol för den svenska marknaden. Tillverkningen sker i någon av företagets två fabriker (F), och den färdiga etanolen transporteras sedan till någon av de två depåerna (D), för att sedan distribueras till någon av de tre kunderna (K). Transportkostnaderna (per 1000 liter) mellan fabrikerna och depåerna ges i Tabell 1, samt mellan depåerna och kunderna i Tabell 2. Tillgången på etanol från respektive fabrik och efterfrågan hos respektive kund för den kommande månaden ges i Tabell 3, där den totala kapaciteten är lika med den totala efterfrågan. Depåerna har en begränsning på antalet liter etanol som kan hanteras per månad och ges i Tabell 3.
Formulera Bilsprits problem att minimera sina transportkostnader under den kommande månaden som ett minkostnadsflödesproblem. Rita nätverket och ange nod- och bågdata. Lös ej!

Tabell 1 Transportkostnad i SEK per 1000 liter etanol, mellan depå (D) och fabrik (F)

	F1	F2
D1	1,50	1,20
D2	1,20	2,00

Tabell 2 Transportkostnad i SEK per 1000 liter etanol, mellan depå (D) och kund (K)

	K1	K2	K3
D1	2,10	3,20	4,90
D2	2,30	2,00	3,30

Tabell 3 Tillgång, efterfrågan och kapacitet, i 1000-liter etanol

Fabrik	F1	F2	
Tillgång	2 400	3 500	
Kund	K1	K2	K3
Efterfrågan	1 700	1 900	2 300
Depå	D1	D2	
Kapacitet	6 000	3 000	

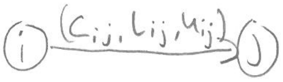
b) Anta att fabrikerna kan producera mer etanol än vad efterfrågan kräver, och kapaciteterna för respektive fabrik är 4 000 000 liter under en månad. Däremot skiljer sig produktionskostnaden åt mellan fabrikerna och kostnaden att producera 1000 liter etanol ges i tabellen nedan. Formulera om minkostnadsflödesproblemet från a-uppgiften för att även kunna bestämma hur mycket etanol som varje fabrik ska tillverka för att minimera den totala kostnaden (produktion och transport).

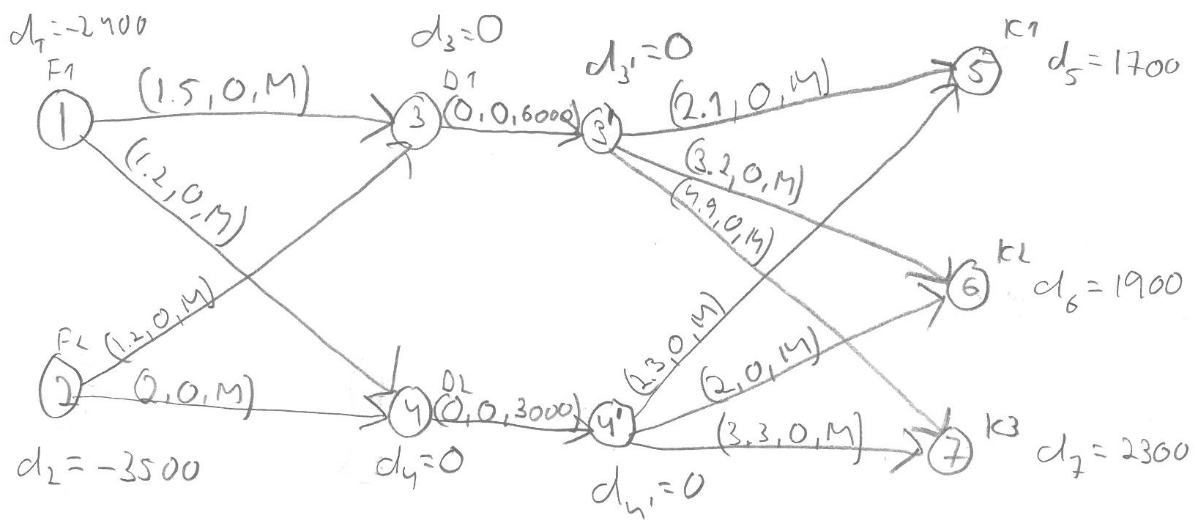
Fabrik	F1	F2
Kostnad	2 000	3000

Kommentar till lösningarna. M används för att beskriva ett väldigt högt värde.

Uppgift a

Variabeldef. x_{ij}: flöde av 1000-tal liter etanol mellan nod i och j, $(i,j) \in B$





Uppgift b