TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 7

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Agenda

- Kursens status
- Repetition
- Egenskaper för lösningen
- Baslösning
- Simplexmetoden
- Simplextablå

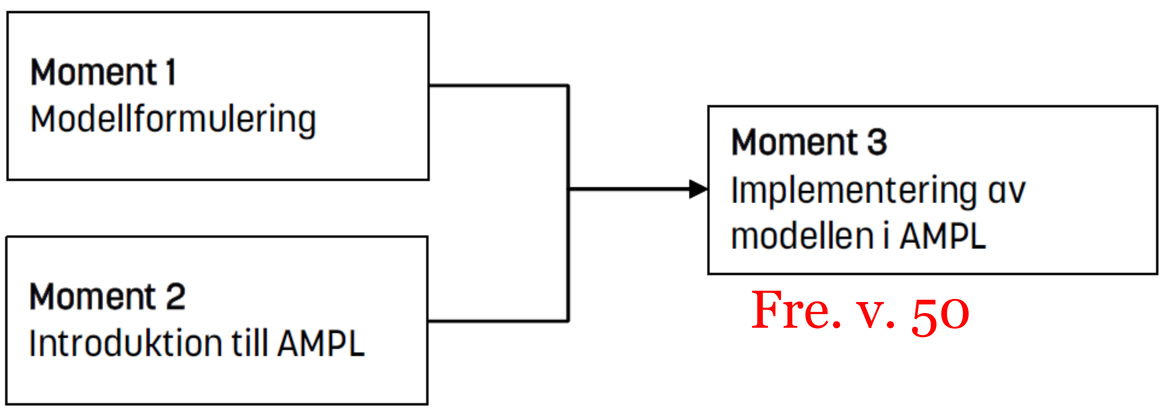
Kursens status

- Föreläsning (1), 2-5: Modellering
- Föreläsning 6-10, (11): Lösningsmetod/känslighetsanalys
- Gruppuppgifter:
  - Gruppuppgift 1:
    - Alla har redovisat muntligt. Många har lämnat in på Lisam. Rättning pågår.
  - Gruppuppgift 2:
    - Redovisas muntligt v. 49. Uppgiften och en anmälningslista ligger på Lisam.
  - Gruppuppgift 3:
    - Redovisas skriftligt senast onsdag v. 51. Uppgiften och en anmälningslista kommer läggas upp på Lisam under v. 48

Kursens status

- Laborationsmomenten:
  - Anmälningslistan ligger ute. Skriv upp er!
  - Läs redan nu labbinstruktionen som ligger på Lisam!

Fre. v. 48



Fre. v. 50

Tor. v. 48

Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP
- Föreläsning 4: matematisk modellering, HP
- Föreläsning 5: matematisk modellering, nätverk
- Föreläsning 6: tolkning av utdata. Introduktion till lösningsmetoder

Idag

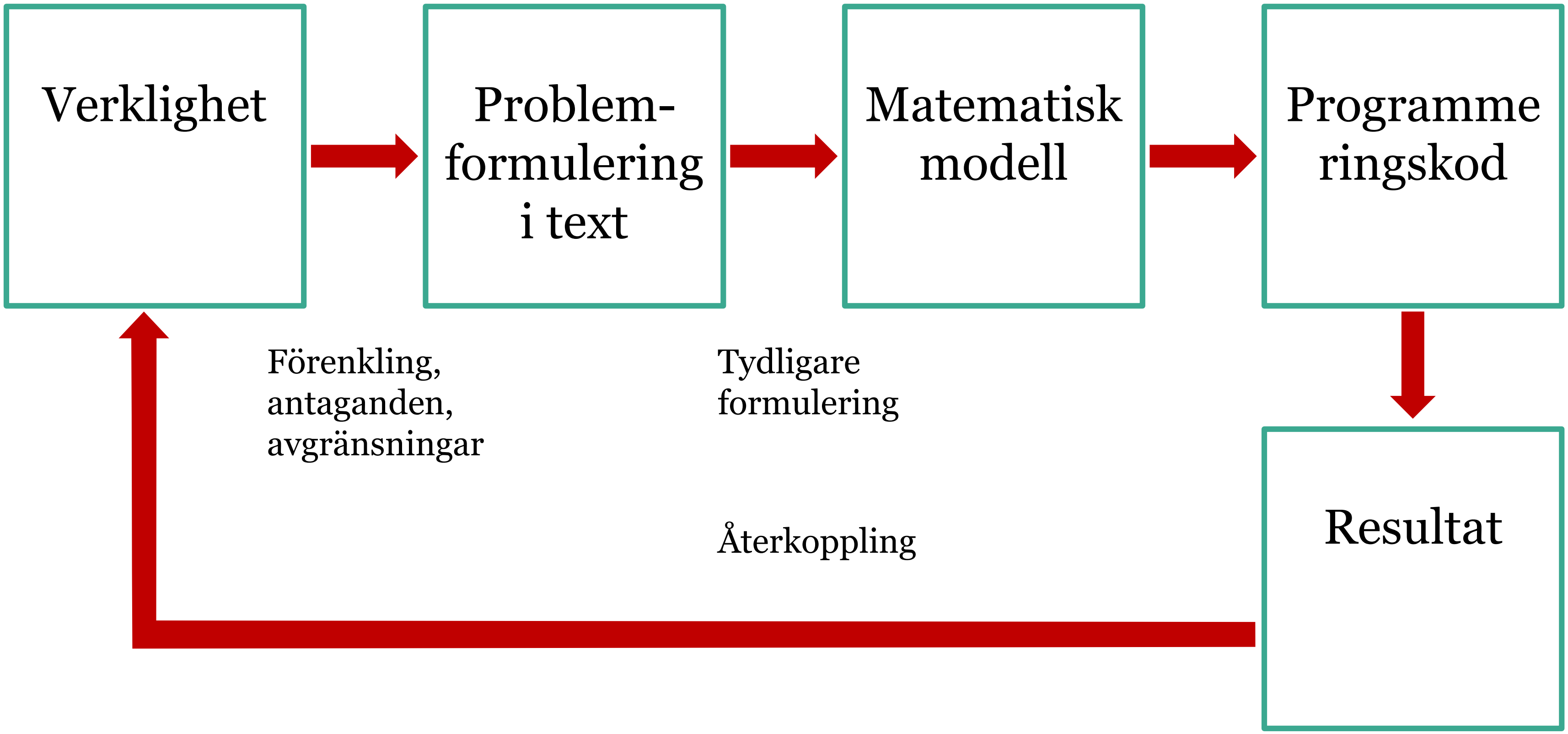
Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för minkostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

Agenda

- Kursens status
- Repetition
- Egenskaper för lösningen
- Baslösning
- Simplexmetoden
- Simplextablå

Modell: repetition



Metodik för modellering

- Vad kan varieras (påverkas, styras, beslutas)?
  - (Besluts)variabler
- Vad är målsättningen, och hur påverkas den av det som kan varieras
  - Målfunktion
- Vilka restriktioner begränsar det som kan varieras
  - Bivillkor

Repetition: variable/parametrar

- Variabler:
  - Används för att beskriva sådant som *varierar*, ofta kopplade till våra beslut.
- Parametrar/konstanter:
  - Används för att beskriva oföränderliga värden.
  - Både i målfunktion och bivillkor!
  - Siffror/bokstäver? Smaksak i matematiska modeller.
  - I AMPL: parametervärden definieras för sig, i en egen fil.
    - Alltså behöver ni inte definiera dem i modellen!

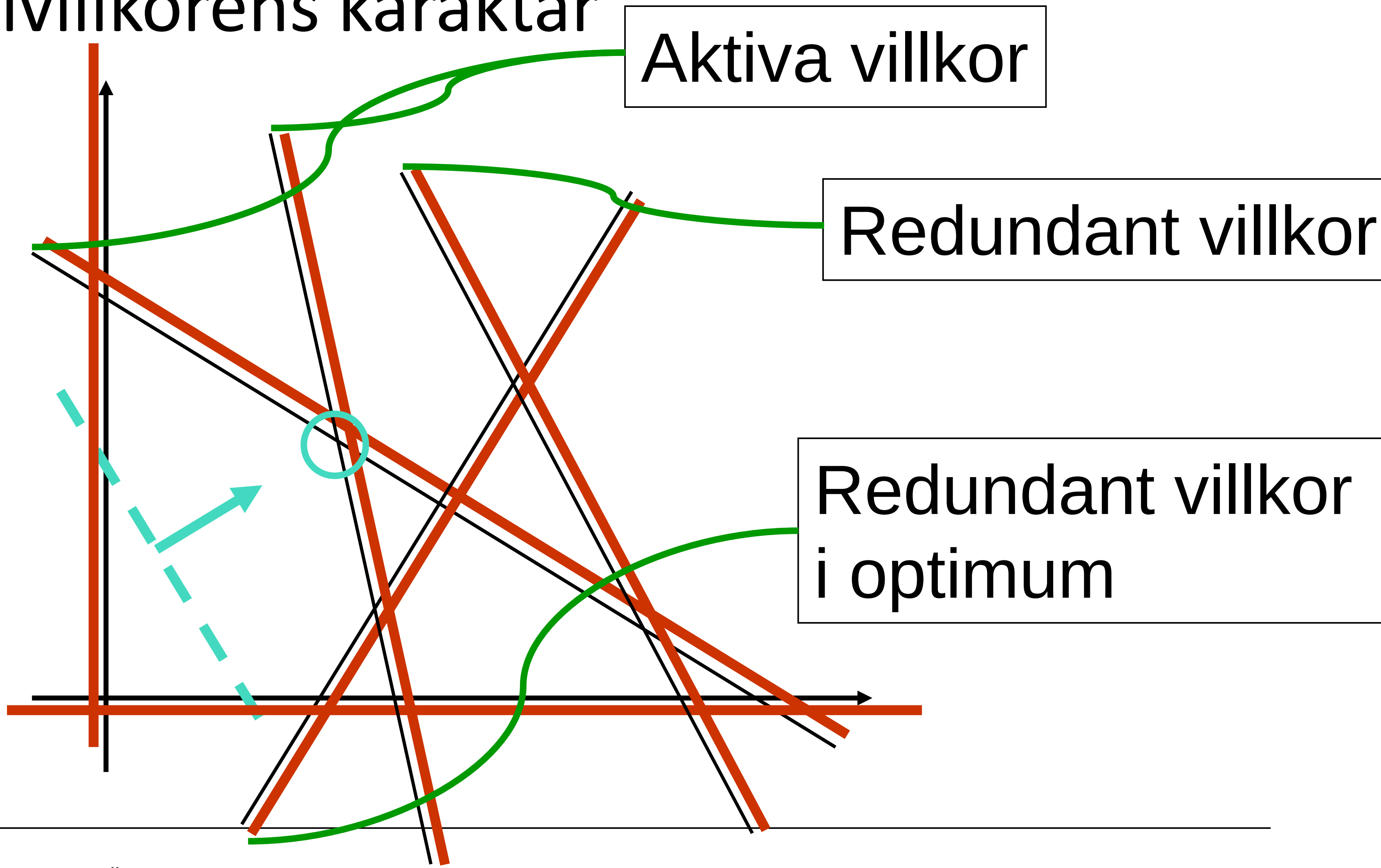
Repetition: (optimerings-) modeller

- Följer en viss struktur/stil. Till exempel:
  - Blanda inte stora/små bokstäver för variabler/parametrar.
  - Använda var./par.-namn som passar deras tolkning. c=cost, (x, y, z)=var., l=lager, I=inköp, ...
  - Använd *i, j, t, k, p,* etc. som index.
  - ∀ = ”för alla”.
  - Skillnad på $\sum_i x_i = a$ och $x_i = a, \ \forall\, i$.
  - Obs: både x^2 och $x * y$ är kvadrater, i optimeringsmodeller.
  - mm
- Bästa sättet att lära sig: läs många modeller (noggrant) och skriv upp egna modeller (noggrant).

Agenda

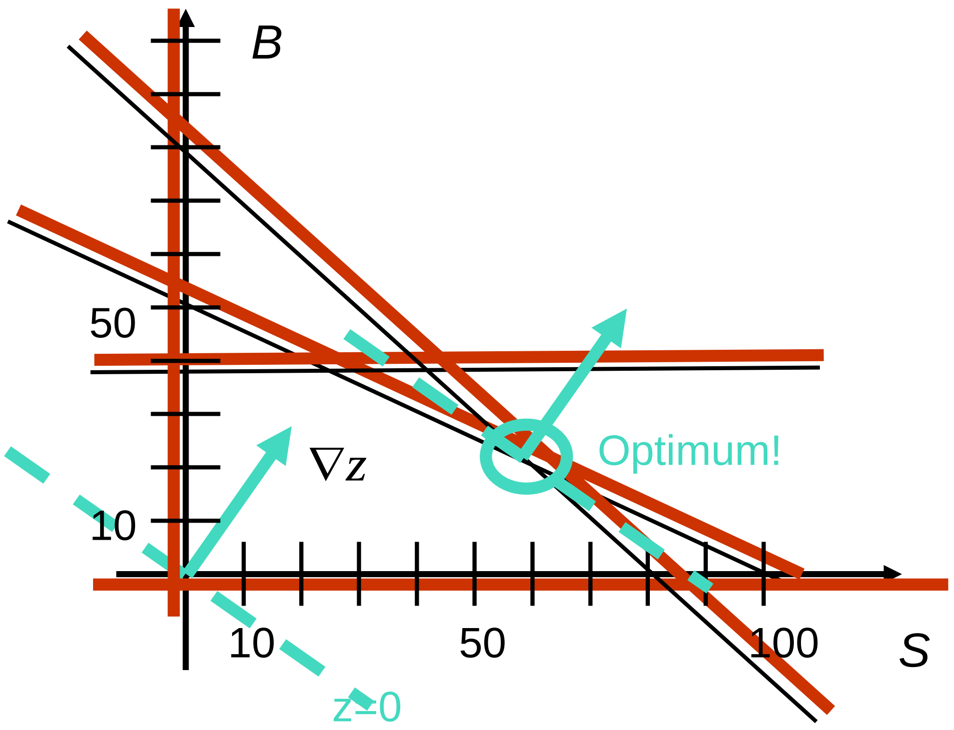
- Kursens status
- Repetition
- Egenskaper för lösningen
- Baslösning
- Simplexmetoden
- Simplextablå

Bivillkorens karaktär



Extrempunkter

- Om tillåtna området är icke-tomt och begränsat, finns en begränsad optimallösning till LP-problemet, som antas i (minst) en extrempunkt.
  - Sök intelligent mellan extrempunkter (hörnpunkter)



Generell sökmetod

Steg 0	Börja i en tillåten startpunkt
Steg 1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning
Steg 2	Kontrollera avbrott. Saknas tillåten och förbättrande sökriktning är vi i (lokalt) opt
Steg 3	Bestäm steglängd
Steg 4	Beräkna nya punkten genom att gå steglängden i förbättrande sökriktningen
Steg 5	Repetera från steg 1

Agenda

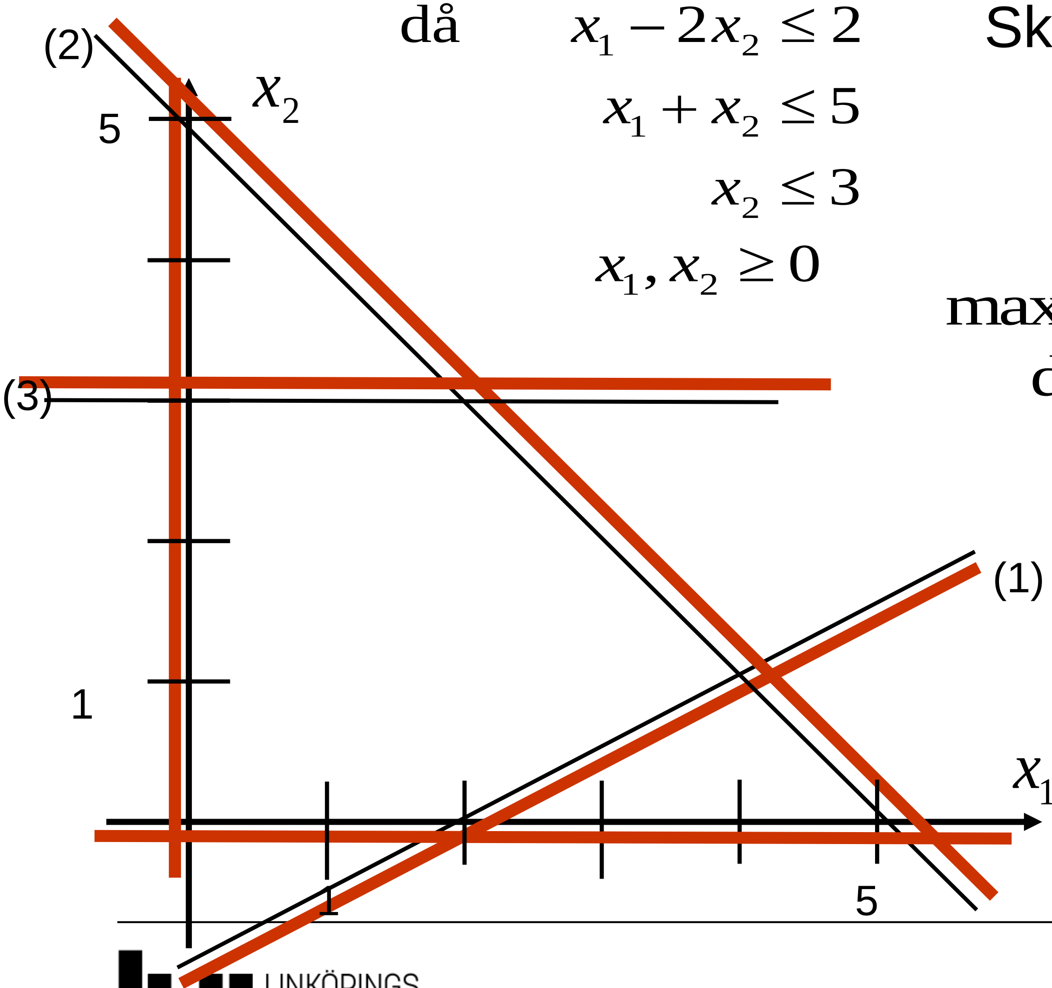
- Kursens status
- Repetition
- Egenskaper för lösningen
- Baslösning
- Simplexmetoden
- Simplextablå

Baslösning

- Antag att man har totalt *n* variabler (inklusive slackvariabler) och *m* villkor (exklusive icke-neg)
- En baslösning erhålls om *n-m* variabler sätts till 0 (kallas ickebasvariabler) och resten (kallas basvariabler) får sina värden av kvarvarande ekvationssystem
- En tillåten baslösning motsvaras av en exakt en hörnpunkt (*extrempunkt*) i det tillåtna området
- Två närliggande baslösningar (har *m-1* basvariabler gemensamt) motsvaras (oftast) av två närliggande hörnpunkter i det tillåtna området
  - Sträva alltså efter att byta ut en basvariabel mot en ickebasvariabel, så att vi får en förbättrad målfunktion!

Exempel – baslösning, extrempunkt

$$\max z = 3x_1 + x_2$$
$$\text{då} \quad x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Skrivs om på standardform:

$$\max z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} \text{då} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 2 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad &= 5 \\ x_2 \quad\quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Notation

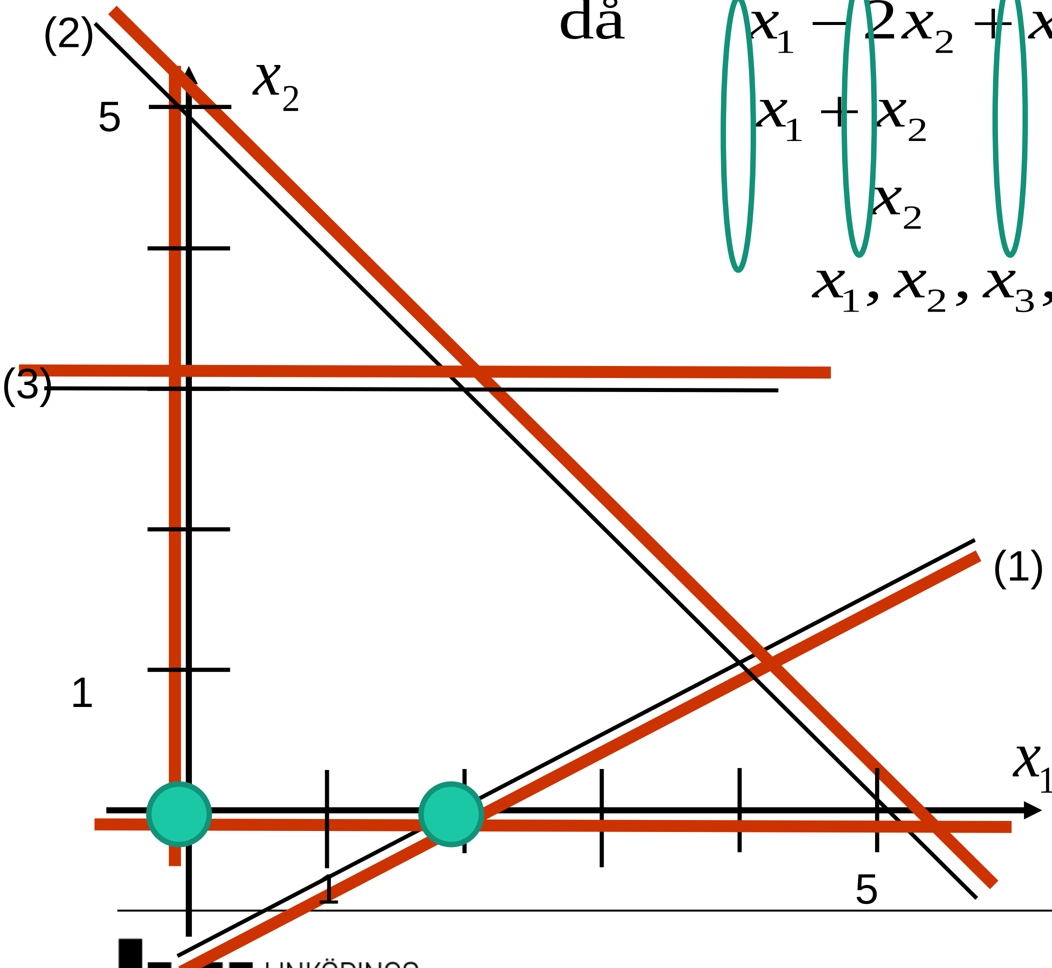
$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & e_3 & e_4 & & e_5 & \bar{b} \\
\max z = 3x_1 + x_2 & & & & & & \\
\text{då} \quad x_1 - 2x_2 & + & x_3 & & & & = 2 \\
x_1 + x_2 & & & + x_4 & & & = 5 \\
x_2 & & & & + & x_5 & = 3 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$om\; x^B = (x_3, x_4, x_5)^T$$

$$x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = \bar{b}$$

Geometrisk tolkning



$$\begin{array}{lcccccl} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & \\ \text{då} & x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = 2 \\ & x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 5 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 3 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$om\, x_B = (x_3, x_4, x_5)^T$$

$$x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = \bar{b}$$

$$om\, x_B = (x_1, x_4, x_5)^T$$

$$x_1 e_1 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = \bar{b}$$

Agenda

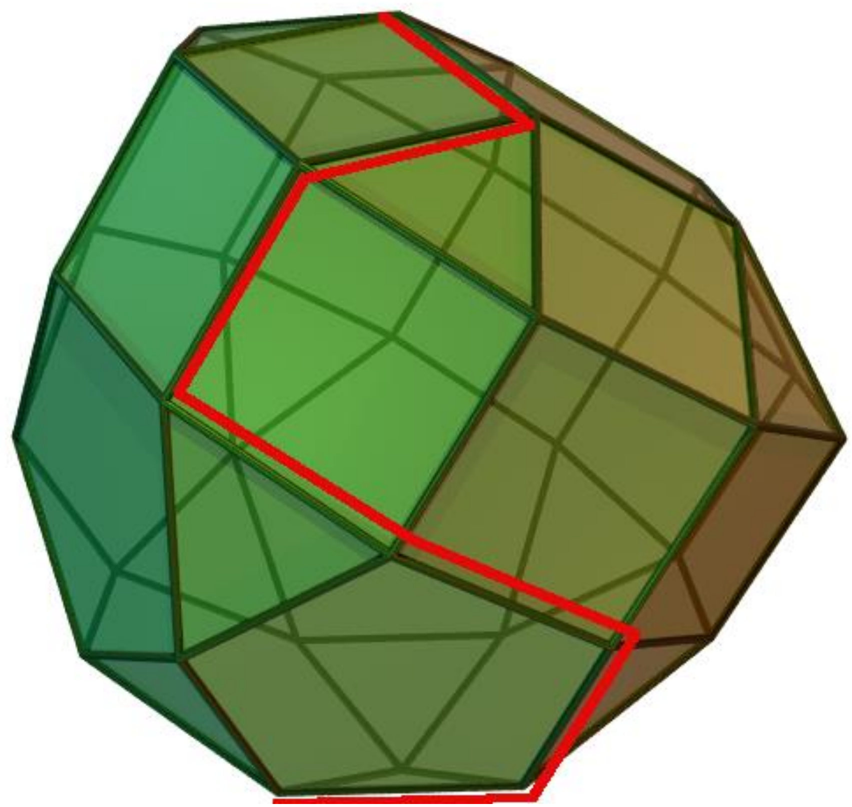
- Kursens status
- Repetition
- Egenskaper för lösningen
- Baslösning
- Simplexmetoden
- Simplextablå

Simplexalgoritmen (George Dantzig, 1947)

En algoritm för att lösa LP-problem (hitta optimum)

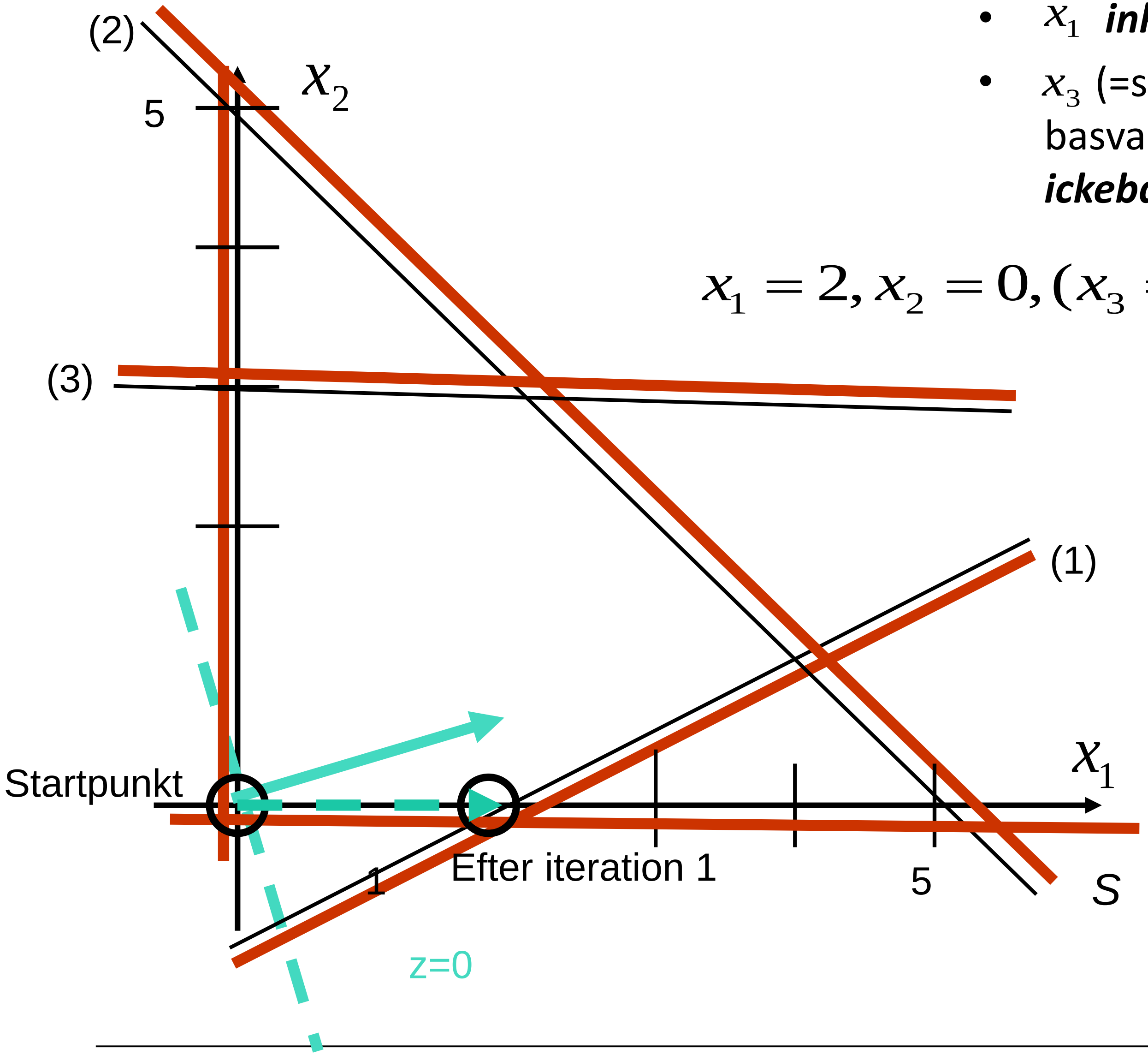
Computing in Science & Engineering (2000): "Top Ten Algorithms of the Century".

In terms of widespread application, Dantzig's algorithm is one of the most successful of all time: Linear programming dominates the world of industry, where economic survival depends on the ability to optimize within budgetary and other constraints. The simplex method is an elegant way of arriving at optimal answers.



Basbyte – Pivotering

- Hur välja vilken ickebasvariabel som skall bli basvariabel och tvärt om?
  - Uttryck basvariabler och målfunktion som funktioner av ickebasvariabler – sedan går det (mesta) ”enkelt”
  - Kom ihåg
    - I lösningsgången ingen skillnad mellan ursprungliga- och slackvariabler
    - ALLA variabler ickenegativa
  - Välj ickebasvariabel med störst påverkan
  - Välj basvariabel med kraftigast begränsning

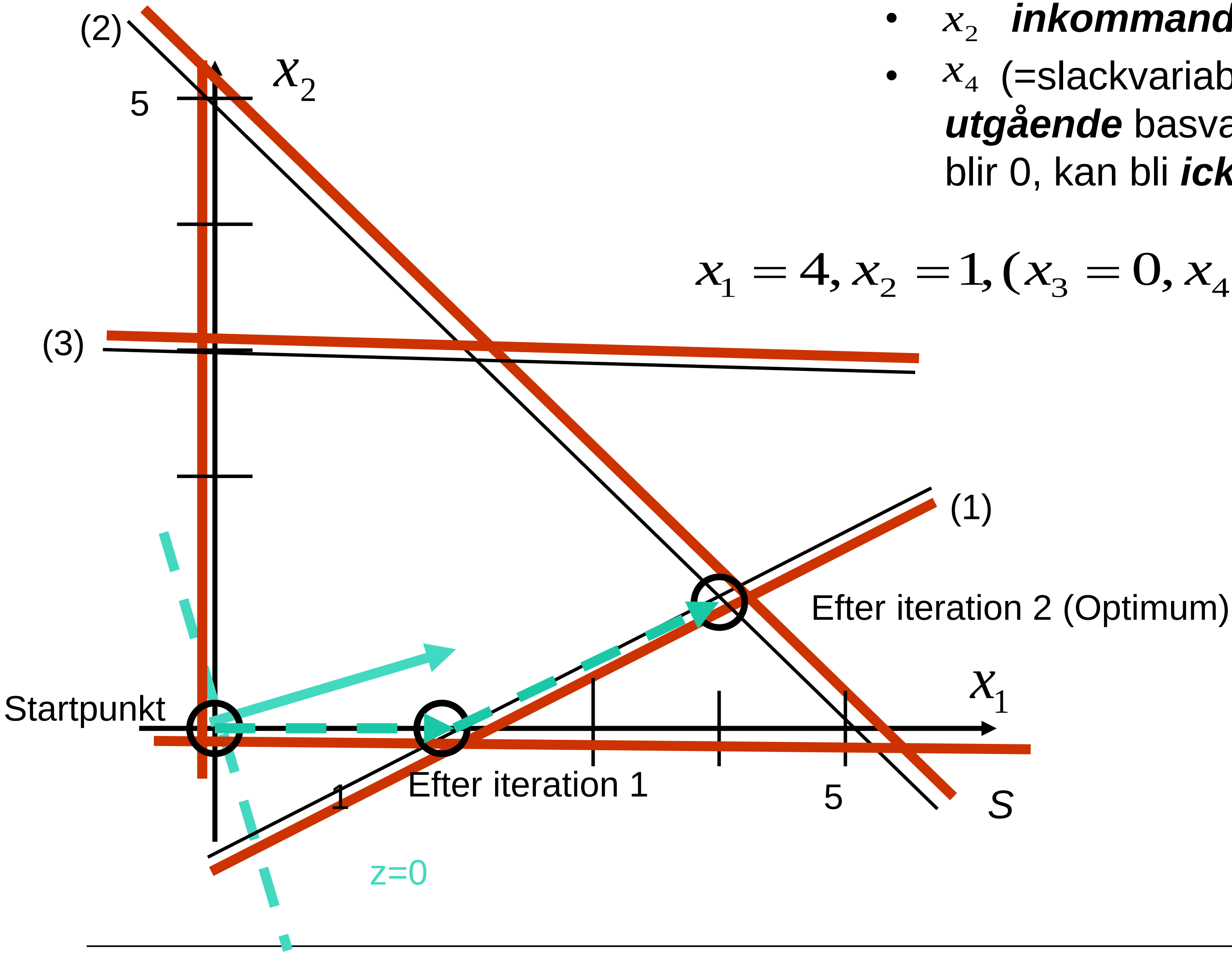


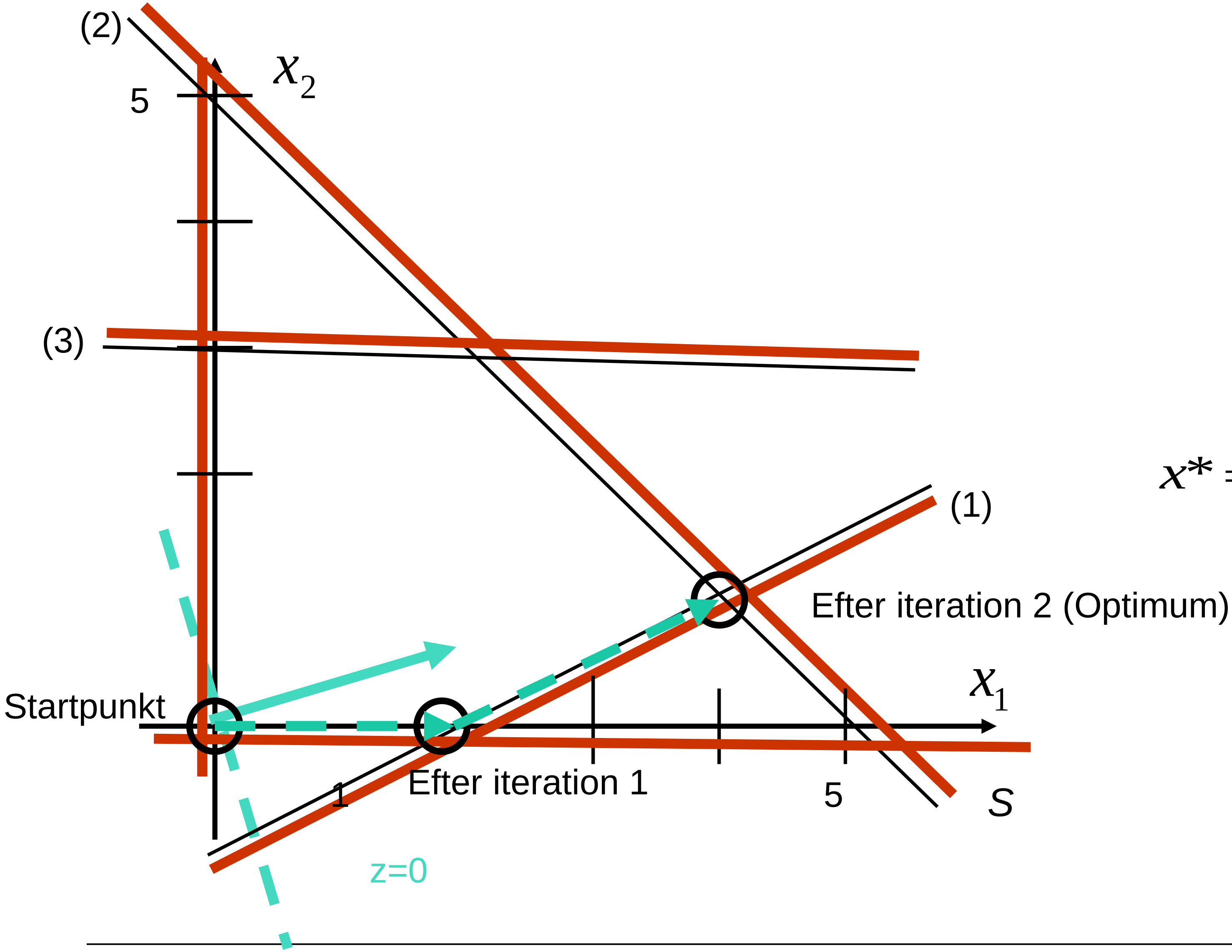
- x_1 ***inkommande*** basvariabel
- x_3 (=slackvariabel i biv. 1) ***utgående*** basvar (begränsar; blir 0, kan bli ***ickebasvariabel***)

$$x_1 = 2, x_2 = 0, (x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 3)$$

- x_2 ***inkommande*** basvariabel
- x_4 (=slackvariabel i biv. 2) ***utgående*** basvar (begränsar; blir 0, kan bli ***ickebasvariabel***)

$$x_1 = 4, x_2 = 1, (x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2)$$




(2)
x_2
5
(3)
(1)
Efter iteration 2 (Optimum)
x_1
Startpunkt
Efter iteration 1
1
5
S
z=0

$$x^* = (4,1)^T$$

Begreppet reducerad kostnad

- Reducerad kostnad
  - Betecknas ofta $\overline{c_j}$ eller $\widehat{c_j}$
  - Tolkning: ”Aktuell målfunktionskoefficient” (i en simplexiteration)
  - Beskriver förändring i målfunktion per enhets ökning av (ickebas)variabel

Simplexmetoden, förenklad (s. 94-95)

0. Utgå från en tillåten baslösning $x^{(0)}$
1. Beräkna: reducerade kostnader för alla icke-basvariabler
2. Har vi nått optimum? Kontrollera avbrottskriterium:
   - minproblem: red.kosnt. >= 0
   - maxproblem: red.kostn. <= 0

   för alla icke-basvariabler
3. Bestäm inkommande basvariabel (se s. 95)
4. Bestäm utgående basvariabel

   Titta på kvoten mellan högerled och koeff. i ink. variabelkolumn.
5. Uppdatera. Gå tillbaka till Steg 1.

Agenda

- Kursens status
- Repetition
- Egenskaper för lösningen
- Baslösning
- Simplexmetoden
- Simplextablå

Simplextablån – Exempelräkning nästa lektion!

- Tablåformen är ett sätt att bokföra simplexalgoritmen.
- Vi kommer att gå igenom samma exempel som idag, men med tablån
- Snabba upp lösningsförfarandet med en tablå som beskriver ekvationssystemet
- Målfunktionsraden måste skrivas om
  - Reducerade kostnaden står med omvänt tecken i tablån

$$z = 3x_1 + x_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z - 3x_1 - x_2 = 0$$

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET