TNSL05 – Övningsuppgifter modellering

1) Ett företag tillverkar och säljer två olika typer av bord. Grundversionen, med skiva i trä, tar 0.6 timmar att sätta ihop, har fyra ben och säljs med 1500 kr i vinst. Lyxversion, med en skiva i glas, tar 1.5 timmar att sätta ihop, har fem ben och säljs med 3000 kr i vinst. För nästa vecka har företaget 300 ben, 50 träskivor, 35 glasskivor och 43 arbetstimmar tillgängliga.

a) Formulera företagets problem att bestämma en produktionsplan för nästa vecka som maximerar vinsten som ett linjärt optimeringsproblem.

b) Företaget kan under nästa vecka ta in extra arbetskraft motsvarande 20 arbetstimmar, till den extra kostnaden 50kr per timma. Formulera om din befintliga modell (fortfarande som ett linjärt optimeringsproblem) för att även kunna bestämma hur många timmar med extra arbetskraft som behövs.

2) En produktionsprocess ger x_i enheter av en produkt i en given tidsperiod i till en kostnad av $f_i(x_i)$. I slutet av varje period säljs d_i enheter och lagerhållningskostnaden är $c_i(y_i)$ där y_i är det utgående lagret efter tidsperiod i. Produktionen kan ej överstiga P i en tidsperiod och lagret i en tidsperiod får ej överstiga L. Ingångslagret i tidsperiod 1 är noll, dvs. y_0.

Formulera problemet att minimera totalkostnaden över n tidsperioder. Definiera noggrant de variabler som används, och ange också vilka parametrar ni använder er av.

3) I ett produktionsplaneringsproblem har man deklarerat variabeln I_{jt} som den kvantitet av produkt $j = 1, ..., n$ som finns i lager i slutet av tidsperiod t. Låt oss anta att det går åt lagerytan v_j att lagra en enhet av produkt j. Formulera bivillkor som uttrycker att den sammanlagda lageryta som används i slutet av någon av tidsperioderna $t = 1, ..., T$ inte överskrider A.

4) Ett fraktflygplan har tre skilda utrymmen där varor kan fraktas: främre, mitten och bakre. Dessa tre utrymmen har följande begränsningar avseende vikt och volym:

Utrymme	Viktkapacitet(ton)	Volymkapacitet (kubikmeter)
Främre	5	68
Mitten	16	87
Bakre	8	100

Följande två varor är tillgängliga att skicka med nästa flygning:

Vara	Vikt (ton)	Volym (kubikmeter/ton)	Vinst (kr/ton)
C1	18	12	3100
C2	15	20	3800

Det är möjligt att välja att endast skicka en del av den totala tillgången av en vara och varje vara kan dessutom delas upp och lastas i flera olika utrymmen. Problemet är att bestämma hur mycket av varje vara C1 och C2 som ska lastas samt hur varorna ska vara fördelade mellan de olika utrymmena så att den totala vinsten av den kommande flygningen maximeras.

a. Formulera problemet som ett linjärt optimeringsproblem

b. För att tillåtas att lyfta måste flygplanet vara väl balanserat. Därför måste proportionen mellan vikten på de lastade varorna och viktkapaciteten i respektive utrymme vara lika för samtliga tre utrymmen. Gör tillägg till modellen så att detta villkor uppfylls.

5) En pub som håller på att öppnas ska anställa personal. Nyckelbefattningarna är redan klara men man behöver anställa minst 5 personer ytterligare (fasta heltidstjänster) för att klara den dagliga driften. Totalt har man fått in 10 sökande som är listade tillsammans med sin begärda månadslön (i tusentals kronor). Dessutom är de tre kompetensområdena kock, ölkunskap och bartender markerade för varje person. K=Kockutbildning, Ö=Diplomerad ölkännare, B=Utbildad bartender.

Asta, 25, B
Bodil, 27, KÖ
Cecilia, 20, Ö
David, 22, B
Erik, 23, K
Frida, 22, B
Gunnar, 29, ÖB
Helen, 21, Ö
Inge, 24, KB
Johanna, 29, KB

Puben vill minimera sina lönekostnader, och följande optimeringsproblem har formulerats.

Låt x_i vara 1 om person *i* anställs och 0 annars, *i* = A(sta), B(odil), C...J

$$\min z = 25x_A + 27x_B + 20x_C + 22x_D + 23x_E + 22X_F + 29x_G + 21x_H + 24x_I + 29x_J$$

då $\sum_{i=A}^{J} x_i \geq 5$ *(minst 5 måste anställas)*

$$x_i \in \{0,1\}, i = A, B \dots J$$

Förutom att det krävs fem anställda för att klara den dagliga skötseln finns det andra krav som man vill ta hänsyn till vid anställningen.

1. Samtliga kompetenser måste finnas representerade bland personalen (behöver dock inte vara olika personer).
2. Bodil och Gunnar har tidigare varit ett par, och vill absolut inte arbeta tillsammans, de är därför bara intresserade av jobbet om bara den ena personen får anställning.
3. Erik är nyutbildad kock och behöver handledning. Endast Bodil har tillräckligt mycket erfarenhet för att handleda, och om Erik anställs måste därför också Bodil anställas.
4. Facket har bedömt bartenderjobbet som ett högriskjobb eftersom det är vanligt att man får citronsaft i ögonen. Ensamarbetande bartenders får därför ett extra lönepåslag om 2000 kr (dvs. en extra kostnad om 2000 kr om endast en bartender anställs). *Tips: Skapa en ny 0/1 variabel som antar värdet 1 om endast en bartender anställs, och 0 annars 0.*

Gör tillägg i modellen så att ovanstående villkor kan hanteras.

6) Ett företag som sänder tv i Sverige har köpt rättigheterna till nästa sommar OS. Företaget har två olika kanaler (kanal A och B i det digitala marksända tv-nätet) som man kan sända i samtidigt. Intäkterna består av reklam som visas under sändningarna.

För att bestämma vilka idrott under OS som ska visas i vilken kanal har man tänkt ta hjälp av en optimeringsmodell.

För att förenkla modellen tittar vi här endast på en av OS dagarna. I tabellen nedan visas de olika idrotterna som finns på programmet denna dag, tillsammans med information om vilken tid de startar respektive slutar. Genom budgivning från annonsörer vet man också vilken reklamintäkt man kan få för respektive idrott.

Idrott nr	Beskrivning	Tid kl. från-till	Reklamintäkt per timma (i SEK)	
			Kanal A	Kanal B
1	Bordtennis	14-18	100 000	50 000
2	Boxning	8-12	70 000	50 000
3	Brottning	14-16	50 000	20 000
4	Bågskytte	10-12	70 000	30 000
5	Cykel	12-18	600 000	400 000
6	Fotboll	14-18	300 000	200 000
7	Friidrott	10-18	500 000	200 000
8	Gymnastik	13-17	40 000	40 000
9	Hästsport	16-18	300 000	250 000
10	Segling	12-16	100 000	70 000
11	Simning	8-12	200 000	50 000
12	Tennis	12-16	100 000	100 000

TV bolaget vill maximera sin intäkt genom att för varje tidsperiod bestämma vilken idrott som ska visas i kanal A respektive kanal B. Alla idrotter måste *inte* visas. För att förenkla planeringen delas dagen upp i tio tidsperioder som motsvarar timmarna mellan 8 och 18, tidsperiod 1 motsvara den timma som börjar kl 8.00, osv. . Observera att det är tillåtet att visa en idrott i flera kanaler, men inte samtidigt. Exempelvis kan cykel visas i kanal A från 12-14 för att sedan visas i kanal B från 14-15 för att sedan visas i kanal A från 15-18.

På nästa sida formuleras optimeringsmodellen.

Följande variabeldefinition har gjorts

$x_{ijk} = 1$, om idrott *i* visas under tidsperiod *j* i kanal *k, i=1,…,12, j=1,…,10, k=A,B*

0, annars

Följande parametrar har identifierats

$a_{ik} =$ reklamintäkten per timma för idrott *i,* när idrotten sänds i kanal *k, i=1,…,12, k=A,B,*

$b_{ij} = 1$ om idrott *i* pågår under tidsperiod *j, i=1,…,12, j=1,…,10,*

0 annars

Målfunktion

$$\max w = \sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=A}^{B} a_{ik}x_{ijk}$$

då $x_{ijA} + x_{ijB} \le b_{ij}$, $i = 1, \dots, 12,\ \ j = 1, \dots, 10$ (en idrott *i* kan endast visas i kanal A eller B om den pågår under tidsperiod *j,* detta villkor säkerställer också att en idrott aldrig visas i båda kanalerna samtidigt)

Inga ytterligare variabler eller parametrar behöver definieras för att lösa dessa uppgifter.

a) Formulera bivillkor som säkerställer att en kanal inte planerar att visar flera idrotter under samma tidsperiod.
b) Det är tillåtet att endast visa en del av en idrott, men en idrott som man har börjat visa måste man fortsätta visa för alla återstående tidsperioder som den pågår under (dock inte nödvändigtvis i samma kanal). Lägg till bivillkor som säkerställer att detta krav uppfylls. *För att exemplifiera kravet kan vi ta fallet då vi väljer att börja sända bordtennis från kl 16, vilket är tillåtet, men detta medför då att man måste sända bordtennisen ända fram till kl 18.*

7) Minkostnadsflödesnätverk

Ett företag som konserverar och säljer frukt har två fabriker, A respektive B. Produktionskapaciteten är 450 respektive 550 ton, och arbetskostnaden är 250 kr/ton respektive 200 kr/ton. Tre fruktodlare erbjuder 300, 700 respektive 500 ton färsk frukt till ett pris av 100, 90 respektive 160 kr/ton. 1 ton frukt blir i fabriken till 1 ton konserverad frukt. Transportkostnaden (kr/ton) mellan fruktodlarna och fabrikerna ges av följande tabell:

	Till Fabrik A	**Till Fabrik B**
Från odlare 1	20	25
Från odlare 2	10	15
Från odlare 3	100	30

Den konserverade frukten säljs för 500 kr/ton.

Företaget kan sälja allt som produceras. Formulera företagets problem att maximera vinsten, som ett minkostnadsflödesproblem. Rita nätverket och ange nod- och bågdata. Lös ej!

8) Minkostandsflödesnätverk

a) Företaget Bilsprit tillverkar fordonsetanol för den svenska marknaden. Tillverkningen sker i någon av företagets två fabriker (F), och den färdiga etanolen transporteras sedan till någon av de två depåerna (D), för att sedan distribueras till någon av de tre kunderna (K). Transportkostnaderna (per 1000 liter) mellan fabrikerna och depåerna ges i Tabell 1, samt mellan depåerna och kunderna i Tabell 2. Tillgången på etanol från respektive fabrik och efterfrågan hos respektive kund för den kommande månaden ges i Tabell 3, där den totala kapaciteten är lika med den totala efterfrågan. Depåerna har en begränsning på antalet liter etanol som kan hanteras per månad och ges i Tabell 3.
Formulera Bilsprits problem att minimera sina transportkostnader under den kommande månaden som ett minkostnadsflödesproblem. Rita nätverket och ange nod- och bågdata. Lös ej!

Tabell 1 Transportkostnad i SEK per 1000 liter etanol, mellan depå (D) och fabrik (F)

	F1	F2
D1	1,50	1,20
D2	1,20	2,00

Tabell 2 Transportkostnad i SEK per 1000 liter etanol, mellan depå (D) och kund (K)

	K1	K2	K3
D1	2,10	3,20	4,90
D2	2,30	2,00	3,30

Tabell 3 Tillgång, efterfrågan och kapacitet, i 1000-liter etanol

Fabrik	F1	F2	
Tillgång	2 400	3 500	
Kund	K1	K2	K3
Efterfrågan	1 700	1 900	2 300
Depå	D1	D2	
Kapacitet	6 000	3 000	

b) Anta att fabrikerna kan producera mer etanol än vad efterfrågan kräver, och kapaciteterna för respektive fabrik är 4 000 000 liter under en månad. Däremot skiljer sig produktionskostnaden åt mellan fabrikerna och kostnaden att producera 1000 liter etanol ges i tabellen nedan. Formulera om minkostnadsflödesproblemet från a-uppgiften för att även kunna bestämma hur mycket etanol som varje fabrik ska tillverka för att minimera den totala kostnaden (produktion och transport).

Fabrik	F1	F2
Kostnad	2 000	3000