Svar till TNA006, 171023

1. (a) Gradienten är

$$\nabla f = (4x^3, 4y^3), \quad \nabla f(-1,1) = (-4,4).$$

Den normerade riktningsvektorn är $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(3,4)$. Riktningsderivatan är

$$f'_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \nabla f(-1,1) = \frac{1}{5}(3,4) \cdot (-4,4) = \frac{4}{5}$$

(b) Låt $f(x,y) = x^4 + y^4$ om kurvan $f(x,y) = 17$ skall vara parallell med linjen $8x + y = 1$, så ska normalvektorerna till kurvorna vara parallella. En nornalvektor till kurvan är $\nabla f = (4x^3, 4y^3)$, den räta linjen har normalvektorn $(8,1)$. Vektorerna är parallella om det finns ett tal λ så att

$$(4x^3, 4y^3) = \lambda(8,1)$$

Vilket ger att $x^3 = 8y^3$ och att $x = 2y$. Det ger en punkt på kurvan då $17 = f(2y,y) = 16y^4 + y^4$ vilket ger att $y^4 = 1$ eller $y = \pm 1$. Punkterna är $\pm(2,1)$.

Svar: Linjerna är $8x + y = 17$ och $8x + y = -17$

2. Stationära punkter fås ur $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} y^2 + 2x - 2 &= 0 \\ 2xy &= 0. \end{cases}$$

Vilket ger lösningar $(0, \pm\sqrt{2})$ och $(1,0)$.

För att avgöra karaktären ser vi på den kvadratiska formen $Q(h,k) = h^2 f''_{xx}(a,b) + 2hk f''_{xy}(a,b) + k^2 f''_{yy}(a,b)$

$$\begin{cases} f''_{xx} &= 2 \\ f''_{xy} &= 2y \\ f''_{yy} &= 2x \end{cases}$$

- $(0, \sqrt{2})$

$$Q(h,k) = 2h^2 + 4\sqrt{2}hk = 2\big[(h + \sqrt{2}k)^2 - 2k^2\big]$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form, f har en sadelpunkt i punkten $(0, \sqrt{2})$

- $(0, -\sqrt{2})$

$$Q(h,k) = 2h^2 - 4\sqrt{2}hk = 2\big[(h-\sqrt{2}k)^2 - 2k^2\big]$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form, f har en sadelpunkt i punkten $(0, -\sqrt{2})$

- $(1, 0)$

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2k^2$$

Vilket är en positivt definit kvadratisk form, f har ett lokalt minima i punkten $(1, 0)$.

Svar: f har ett lokalt minima i punkten $(1, 0)$.

3. Bestäm

$$\int_0^1 \Big(\int_y^1 \frac{y\sin x}{x}dx\Big)dy = \iint_D \frac{y\sin x}{x}dxdy$$

Där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(1,0)$.

$$\iint_D \frac{y\sin x}{x}dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^x \frac{y\sin x}{x}dy\Big)dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2\sin x}{2x}\right]_0^x dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x dx = \frac{1}{2}\Big[-x\cos x\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos x dx = \frac{-\cos 1}{2} + \frac{1}{2}\Big[\sin x\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{-\cos 1}{2} + \frac{\sin 1}{2} = \frac{\sin 1 - \cos 1}{2}.$$

4. Området är inte kompakt.

Studerar först max/min på det kompakta området $D_R = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \leq R^2\}$. Området D_R är kompakt och f är kontinuerlig, således antas största och minsta värdet i D_R.

Stationära punkter:

$$\nabla f = ((2xy - 2x^3y)e^{-x^2-2y^2},\ (x^2 - 4x^2y^2)e^{-x^2-2y^2})$$

Stationära punkter fås ur $\nabla f = 0$ då exponentialfunktionen aldrig blir noll kan vi lösa:

$$\begin{cases} 2xy(1-x^2) &= 0 \\ x^2(1-4y^2) &= 0 \end{cases}$$

Lösningar är $(0, y)$, $(\pm 1, \pm\frac{1}{2})$.

Singulära punkter: Saknas då ∇f finns överallt.

Randen: $x^2 + 2y^2 = R^2$. Randen kan parametriseras med

$$x = R\cos\theta, \quad y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

Funktionens värden på randen är

$$f(R\cos\theta, \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}R^3\cos\theta\sin\theta e^{-R^2}$$

Värdet på randen kan fås godtyckligt nära 0 genom att välja R stort nog.

Sammanfattning:

$$f(0,y) = 0, \quad f(\pm 1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-3/2}, \quad f(\pm 1, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-3/2},$$

På D_R är största värdet är alltså $\frac{1}{2}e^{-3/2}$ och det minst värdet är $-\frac{1}{2}e^{-3/2}$.

Eftersom vi har ett största och minsta värde i det inre av D_R på alla mängder D_R med stort R får vi att

Svar:

5. Låt $F(x,y) = x^2 + y + e^{x^2y}$.

$$F'_y = 1 + x^2e^{x^2y}, \quad F'_y(0,0) = 1$$

Ekvationen definierar således y som en funktion av x då $F'_y(0,0) \neq 0$.

Det följer att $y(0) = 0$.

Derivera implicit m.a.p. x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y + e^{x^2y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1\right)$$

$$2x + y' + e^{x^2y}(2xy + x^2y') = 0$$

I punkten $(0,0)$ fås $y'(0) = 0$

Derivera implicit m.a.p. x igen :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x + y' + e^{x^2y}(2xy + x^2y')\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(0\right)$$

$$2 + y'' + e^{x^2y}(2xy + x^2y')^2 + e^{x^2y}(2y + 4xy' + x^2y'') = 0$$

I punkten $(0,0)$ fås att $y''(0) = -2$.

Svar: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.

6.
$$\iiint_D yz\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big(\int_0^{1-x} yz\,dz \Big) dxdy =$$

Där D_{xy} är området i xy-planet som begränsas av $x = y^2$, $y = 0$ och $x = 1$.

$$\iint_{D_{xy}} \left[y\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x} dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} y(1-x)^2 dxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{x}} y(1-x)^2 dy \Big) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}(1-x)^2 dy \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^3-2x^2+x) dx =$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{48}.$$

7. Kedjeregeln ger:
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = xz'_u$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} z'_y = \frac{\partial}{\partial x}\Big(xz'_u \Big) = z'_u + x\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \right) =$$
$$= z'_u + x\Big(yz'_{uu} + z''_{uv} \Big) = z'_u + xyz''_{uu} + xz''_{uv}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} z'_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xz'_u \Big) = x\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) =$$
$$= x\Big(xz'_{uu} \Big) = x^2 z''_{uu}$$

I VL i PDEn:

$$xz''_{xy} - yz''_{yy} - z'_y = x(z'_u + xyz''_{uu} + xz''_{uv}) - y(x^2 z''_{uu}) - xz'_u = x^2 z''_{uv}$$

PDEn är
$$x^2 z''_{uv} = x^3 y \quad \Rightarrow \quad z''_{uv} = xy = u$$

Lös: $z'_v = \frac{u^2}{2} + g(v)$ som ger att $z = \frac{u^2 v}{2} + G(v) + f(u)$.

Svar: $z(x,y) = \frac{x^3 y^2}{2} + G(x) + f(xy)$ där f och G är godtyckliga deriverbara funktioner.