TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 7

Signaler och system – frekvensdomänen, tidsdiskreta fourierserier och fouriertransformer samt fönstring och DFT

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Kommunikationssystem

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Tidskontinuerlig fouriertransform

Krav på signalen $x(t)$:

- Absolutintegrerbar: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$
- Ändligt antal diskontinuiteter.
- Begränsad variation: $\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|\, dt < \infty$

Transform:

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

- Spektrum av $x(t)$: $X(\omega)$
- Amplitudspektrum: $|X(\omega)|$
- Fasspektrum: $\arg\{X(\omega)\}$

Signaleffekt och signalenergi – Parseval

Signaleffekt: $|x(t)|^2$ Signalenergi: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$

Parsevals relation, TK fouriertransform (specialfall):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega\, x^*(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\, dt\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

Energispektrum: $|X(\omega)|^2$

Parsevals relation (generellt): $\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B^*(\omega)\, d\omega$

Tidsdiskreta fourierserier och -transformer

TD fourierserier

Krav på signalen $x[k]$: Periodisk, period K_0.

$$x[k] = \sum_{n=0}^{K_0-1} D_n e^{jkn\Omega_0} \qquad D_n = \frac{1}{K_0}\sum_{k=0}^{K_0-1} x[k]e^{-jkn\Omega_0} \qquad \Omega_0 = 2\pi/K_0$$

TD fouriertransform

Krav på signalen $x[k]$: Icke-periodisk. Absolutsummerbar.

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{-jk\Omega}\, d\Omega \qquad X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\Omega}$$

Periodisk med period 2π.

Egenskaper hos fourierserieutveckling

Låt $x[k]$ och $y[k]$ vara periodiska signaler med period K, normerad vinkelfrekvens Ω_0 och fourierseriekoefficienter C_n respektive D_n.

Signal	Fourierseriekoefficient # n
$ax[k]+by[k]$	aC_n+bD_n
$x[k-k_0]$	$C_n e^{-jn\Omega_0 k_0}$
$x[-k]$	C_{-n}

Utsignal från ett tidsdiskret LTI-system

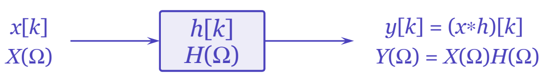
Notation: $A(\Omega)=\mathscr{F}\{a[k]\}$ $\quad B(\Omega)=\mathscr{F}\{b[k]\}$

Egenskap: $\mathscr{F}\{(a*b)[k]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a*b)[k]\,e^{-j\Omega k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]b[k-n]e^{-j\Omega k}$

$$=\Big/ m=k-n \Big/ =\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]b[m]e^{-j\Omega(n+m)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]e^{-j\Omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}b[m]e^{-j\Omega m}=A(\Omega)B(\Omega)$$

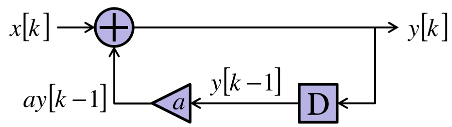
LTI-system:



Viktig egenskap: Fördröjning – exempel

Notation: $X(\Omega)=\mathscr{F}\{x[k]\}$ $\quad$ Vi har: $\mathscr{F}\{x[k-k_0]\}=e^{-jk_0\Omega}X(\Omega)$

Exempel:



Energifritt:
$y[k]$ initialt 0.

Ur figur: $y[k]=x[k]+ay[k-1]$

$\Rightarrow \quad y[k]-ay[k-1]=x[k]$

Transformera $\Rightarrow$

$$Y(\Omega)-ae^{-j\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad (1-ae^{-j\Omega})Y(\Omega)=X(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad Y(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}X(\Omega)$$

Mera Parseval

För TK fouriertransform: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$

För TK fourierserie: $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|D_n|^2$

För TD fouriertransform: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$

För TD fourierserie: $\frac{1}{K_0}\sum_{k=0}^{K_0-1}|x[k]|^2=\sum_{n=0}^{K_0-1}|D_n|^2$

DFT – Diskret fouriertransform

Tidsdiskret signal med begränsad tidsutbredning:

$$x[k]=0 \quad \text{för} \quad k \notin \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Fouriertransform: $X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-jk\Omega}$ Kont. m. period 2π.

DFT av längd L: $X_L(n)=X\left(2\pi\frac{n}{L}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j2\pi\frac{n}{L}k}$

för $n \in \{0,1,\ldots,L-1\}$

IDFT – Inversen till diskret fouriertransform

IDFT: $x_L[k]=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} X_L(n)e^{j2\pi\frac{n}{L}k} \quad \Rightarrow \quad x_L[k+L]=x_L[k]$

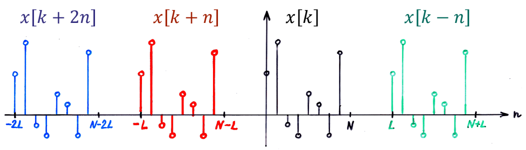
Diskret med period L.

Förhållande till $x[k]$:

$$x_L[k]=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j2\pi\frac{n}{L}m}e^{j2\pi\frac{n}{L}k}=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\underbrace{\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi(m-k)\frac{n}{L}}}_{=\begin{cases} L, & m=k \mod L \\ 0, & \text{för övrigt}\end{cases}}=\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[k-iL]$$

Om $L<N$ så får vi överlapp mellan de olika kopiorna. Detta kallas vikning.

Därför: Krav $L \geq N$



DFT – Periodisk faltning

Vi är vana vid: $Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad y[k]=(x*h)[k]$

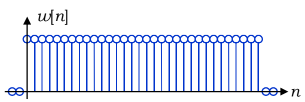
Men vi har: $y[k]=x[k]h[k] \quad \Leftrightarrow \quad Y(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Phi)H(\Omega-\Phi)d\Phi$

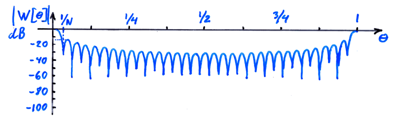
Med DFT: $Y_L(n)=X_L(n)H_L(n) \quad \Leftrightarrow \quad y_L[k]=\sum_{m=0}^{L-1} x_L[m]h_L[k-m]$

Men också: $y_L[k]=x_L[k]h_L[k] \quad \Leftrightarrow \quad Y_L(n)=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1} X_L(m)H_L(n-m)$

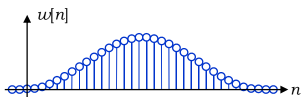
Exempel på fönster, N=32

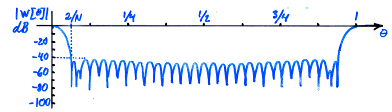
Rektangulärfönster: $w[n] = 1, \quad n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$



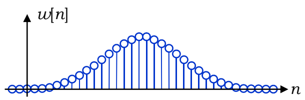


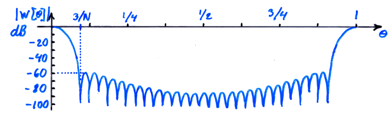
Hammingfönster: $w[n] = 0.54 - 0.46\cos(\frac{2\pi N}{N-1}), \quad n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$





Blackmanfönster: $w[n] = 0.42 - 0.5\cos(\frac{2\pi N}{N-1}) + 0.08\cos(\frac{4\pi N}{N-1}),$
$n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$





Mikael Olofsson

ISY/KS

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET