

TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 4

Kursmål: idag

Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för min kostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

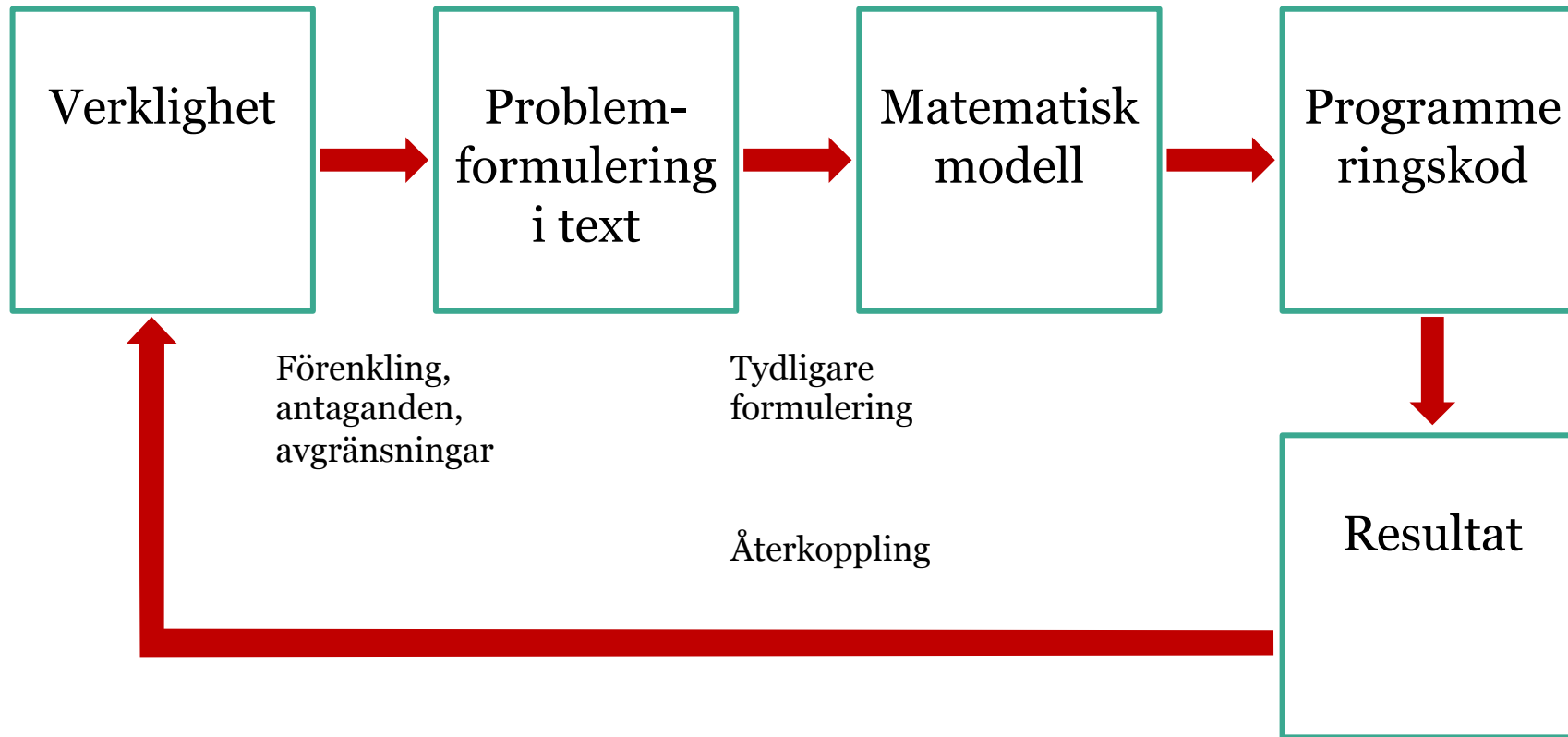
Dagordning

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem
 - Logiska villkor

Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP

Modell



Problemklassificering

- Linjärprogrammering (LP)
 - Alla samband (målfunktionen, bivillkoren) är linjära
- Ickelinjär programmering
 - Vissa av sambanden är icke linjära
- Heltalsproblem
 - Kan tillhöra båda kategorierna
 - Alla/några av variablerna kan bara anta diskreta värden
- Nätverksproblem
 - Tydlig struktur
 - Ofta geografiska
- Med mera...

Idag

- Linjärprogrammering (LP)
 - Alla samband (målfunktionen, bivillkoren) är linjära
- Ickelinjär programmering
 - Vissa av sambanden är icke linjära
- Heltalsproblem
 - Kan tillhöra båda kategorierna
 - Alla/några av variablerna kan bara anta diskreta värden
- Nätverksproblem
 - Tydlig struktur
 - Ofta geografiska
- Med mera...

Dagordning

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem
 - Logiska villkor

Heltalsmodeller – varför?

- Används exempelvis vid
 - Fasta kostnader
 - Ja/Nej beslut
 - Logiska villkor
 - Endast vissa variabler tillåtna
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 - 1, 6, 23, 45
- Exempel på problemtyper
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem

Heltalsmodeller - varför?

Ett företag ska köpa in nya maskiner till sin produktion

- Två olika maskiner kan köpas in: en kostar 20 000 kr, en annan 30 000 kr.
- Maskinkapaciteten är 9 respektive 10 enheter per timme.
- Företaget kan investera maximalt 60 000 kr.
- Max två av de billigare maskinerna kan köpas.

Hur ska företaget göra sina inköp för att maximera kapaciteten?

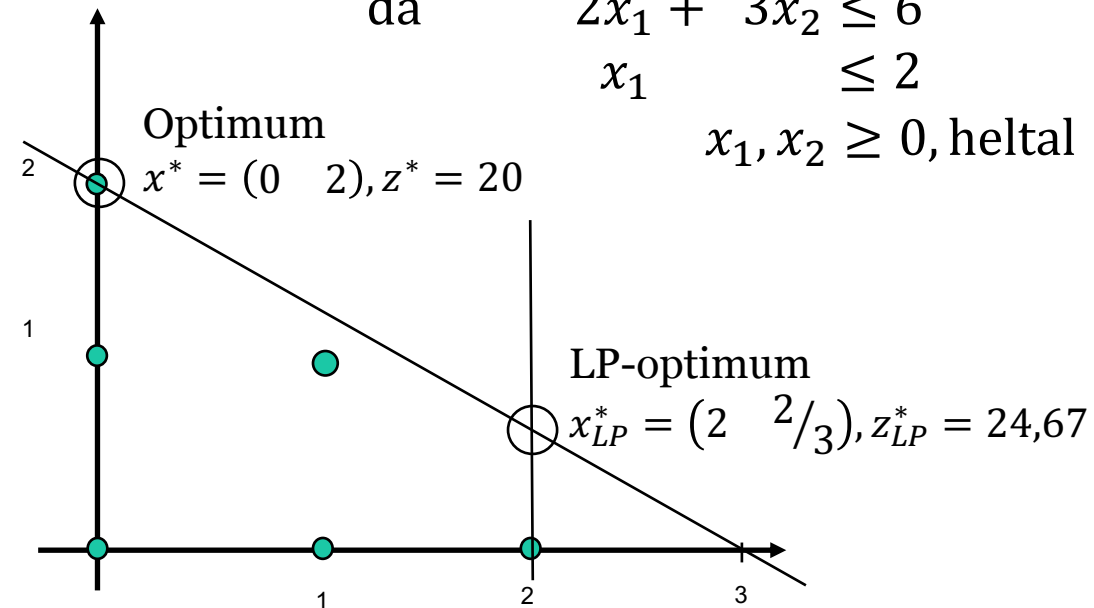
Två variabler: x_1 och x_2 = antalet billiga respektive dyra maskiner som köps in

$$\max z = 9x_1 + 10x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ heltal}$$



Dagordning

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem
 - Logiska villkor

Lokaliseringsproblem

Vi skall bygga en eller två fabriker och har tre platser att välja på: Linköping, Linghem, Norrköping. Fabrikerna kan vara små eller stora. Kapaciteten på en liten fabrik kallas f ton/år och på en stor g ton/år.

Vi skall försörja marknaden i Finspång med hjälp av fabrikerna. Efterfrågan i Finspång är e ton/år. Den årliga avskrivningskostnaden är a kr/år för en liten fabrik och b kr/år för en stor fabrik. Antag att produktionskostnaden är samma i alla fabriker.

Transportkostnaden antas proportionell mot avstånd och transporterad mängd, c kr/ton*km. Avstånden från respektive produktionsort till Finspång är 68 km (Linköping), 47 km (Linghem) och 31 km (Norrköping). Endast en fabrik kan byggas på varje ort.

- Var skall vi bygga fabriker, av vilka storlekar, och hur mycket skall produceras/transporteras i varje fabrik; för att minimera totala kostnaden?

Dagordning

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem
 - Logiska villkor

Tillordningsproblem

Ett företag har fem jobb som ska utföras av någon av de tre arbetarna. Varje arbetare har olika kompetens och kan utföra varje arbete olika snabbt.

Tiden i timmar det tar för varje arbetare att utföra varje jobb ges i tabellen nedan, samt max tillgänglig tid för varje arbetare.

Företaget vill minimera den totala tidsåtgången det tar att utföra de fem jobben.

	Arbetare		
Jobb	A	B	C
1	8	10	11
2	3	8	5
3	10	12	11
4	6	13	9
5	4	9	8
Tillgänglig tid	20	30	18

Dagordning

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem
 - Logiska villkor

Kappsäcksproblem

- Ett antal varor, N , ska packas ner i en kappsäck, vi vill maximera värdet av varorna som packas ner i kappsäcken, samtidigt som vi inte kan packa ner mer än vad volymen på kappsäcken tillåter.
- Variabeldefinition: x_j = antal av vara j som packas ner i kappsäcken
- Parametrar:
 - c_j = värdet på vara j
 - a_j = storlek på vara j
 - b = storlek på kappsäcken

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^N c_j x_j \\ \text{då} \quad &\sum_{j=1}^N a_j x_j \leq b \\ &x_j \geq 0, \text{ heltal}, j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Kappsäcksproblem

Ett byggbolag har tillgänglig mark för att starta 6 olika byggprojekt under den kommande planeringsperioden. Varje projekt förväntas ge vinsten 10, 20, 30, 15, 23, 12 mkr. Samtidigt har företaget en begränsad kassa att använda till att investera i projekten och en begränsade produktionsresurser (personal, maskiner, ledning etc.). Resursförbrukning (kassa och produktion) ges i tabellen nedan, tillsammans med tillgängliga resurser.

Formulera företagets problem att välja ut vilka projekt som ska genomföras så att vinsten maximeras.

Projekt	Kassa (mkr)	Produktion (resursenheter)
1	235	10
2	123	12
3	178	15
4	210	23
5	256	17
6	123	9
Tillgängliga resurser	800	50

Dagordning

- Kort repetition
- Heltalsmodeller – varför?
- Formulering av modeller, exempel:
 - Lokaliseringsproblem
 - Tillordningsproblem
 - Kappsäcksproblem
 - Logiska villkor

Logiska villkor, övning

- Antag variabeldefinitionen:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{om händelse } i \text{ inträffar, } i \in \{A, B, C\} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Modellera:
 - Högst en av händelse A,B och C får inträffa
 - Exakt en av händelser A,B och C måste inträffa
 - Om A händer måste minst en av B eller C inträffa
 - Om B eller C (eller båda) händer måste A inträffa

YouTube

Tips på filmer:

- <https://youtu.be/kSoya2fb9qw>
- https://youtu.be/5sS_gf-yE74
- <https://youtu.be/dKsGtIq2Afo>
- <https://youtu.be/KKswYyTaCXo>

De går igenom samma exempel som jag presenterat i den här föreläsningen, men med modelldesign och variabelnamn som är lite annorlunda.

www.liu.se