Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2013-08-28
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Vilka reella tal x uppfyller villkoret

$$\frac{x}{x-6} \leq x?$$

   b) Lös för reella x ekvationen

$$\ln(x+4) + 2\ln x = 3\ln 2.$$

2. Betrakta funktionen $f(x) = |2x-1| - |x| - x, x \in \mathbb{R}$.

   a) Lös ekvationen $f(x) = 0$.
   b) Undersök om f har invers och ange i så fall denna.

3. a) Vilket eller vilka av följande samband A - C gäller för alla godtyckliga komplexa tal z?
   OBS! För poäng på uppgiften krävs motiveringar av det angivna svaret.

   A. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$ B. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ C. $\overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2$

   b) Beräkna z^{100} om $z = 1 - \frac{1-i}{1+i}$.

4. I en ON-bas har linjen L ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

   a) Ange ekvationen för en annan linje (valfri) som skär linjen L och är vinkelrät (ortogonal) mot den givna linjen L.
   b) Beräkna avståndet mellan linjen L och punkten $(2, 0, -1)$.

5. Låt de fyra funktionerna $f_1(x) = \ln(x-1)$, $f_2(x) = e^{x-1}$, $f_3(x) = \arctan(x-1)$ och $f_4(x) = |\sin(x-1)|$ vara definierade på sina naturliga definitionsmängder, d.v.s. överallt där de har mening. Nedan finns sex funktionsegenskaper, (1) – (6), angivna. *Vilken eller vilka* egenskaper har respektive funktion? *OBS! Endast svar skall anges, d.v.s. inga motiveringar krävs.*

   (1) Funktionens definitionsmängd är $\mathbb{R}$ (alla reella tal).
   (2) Funktionens värdemängd är $\mathbb{R}$ (alla reella tal).
   (3) Funktionsvärdena är > 0 för alla x i funktionens definitionsmängd.
   (4) Funktionen är strängt växande på hela sin definitionsmängd.
   (5) Funktionen har invers på hela sin definitionsmängd.
   (6) Funktionen antar värdet 0 för precis ett x i sin definitionsmängd.

6. a) Formulera binomialsatsen.
   b) I utvecklingen av $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^9$ finns en konstant term. Bestäm denna term.

7. Låt D betyda avbildningen av en reell funktion på en reell funktion där D har de båda egenskaperna

   (i) $f(x) = x \Rightarrow D(f(x)) = D(x) = 1$

   (ii) $D(f(x) \cdot g(x)) = D(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g(x))$

   där f och g är reella funktioner.
   Visa att då gäller det att $D(x^n) = nx^{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.
   Anm: Vi låter här $x^0 = 1$ för alla reella x, d.v.s. även för $x = 0$.