Linköpings universitet
Institutionen för teknik och naturvetenskap
Michael Hörnquist

Statistik och sannolikhetslära, TNIU66

Tentamen, 9 juni 2025, Svar och lösningsskisser

Nedanstående är svar, med viss diskussion och antydningar till hur uppgifterna *kan* lösas. Det är *inte* nödvändigtvis fullständiga lösningar. Grundstommen till lösningarna är framtagen med Copilot.

Del B: Sannolikhetslära

1. Tärningsspel

(a) Antal gynnsamma utfall: 6 (för summan 7) + 2 (för summan 11) = 8. Totalt antal utfall: 36.

$$\Pr(\text{vinst}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

(b) Binomialfördelning med $n = 3$, $\pi = \frac{2}{9}$:

$$\Pr(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{9}\right)^1\left(\frac{7}{9}\right)^2 = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{49}{81} = \frac{294}{729} \approx 0.403$$

(c)

$$\Pr(\text{minst en vinst}) = 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^3 = 1 - \frac{343}{729} \approx 0.53$$

2. Täthetsfunktion

Täthetsfunktion: $f(x) = \frac{x}{2}$ för $0 \le x \le 2$.

(a)

$$\Pr(X \le 1,3) = \int_0^{1,3} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{1,3} = \frac{1,69}{4} = 0,4225$$

(b)

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$\mathrm{Var}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}, \quad \text{Standardavvikelse} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(c) Enligt centrala gränsvärdessatsen:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = \frac{4}{3}, \sigma = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{50}}\right)$$

$$Z = \frac{1,3 - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{50}}} \approx -0,5 \Rightarrow \Pr(\bar{X} \leq 1,3) \approx 0,3085$$

Del C: Statistik

3. Opinionsundersökning

(a) Stickprovsandel: $p = \frac{38}{100} = 0,38$. Koll om normalapproximation ok: $np(1-p) = 23,56 > 5$ ok.

$$0,38 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0.38 \cdot 0.62}{100}} \approx 0,38 \pm 0,095 \Rightarrow [0,285, 0,475]$$

(b) Tolkning: Vi är 95% säkra på att den sanna andelen som stödjer förslaget ligger mellan 28,5% och 47,5%. Det betyder att om vi gör om stickprovet många gånger kommer de funna konfidensintervallen att täcka det sanna värdet 95% av gångerna.

(c) Felmarginal $z_{1-\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n} = 0,03$, $p = 0,38$:

$$n = \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 \cdot 0,38 \cdot 0,62 \approx 1011$$

4. Hypotesprövning

(a)

$$H_0 : \pi = 0,30 \quad H_1 : \pi \neq 0,30$$

(b) $p = \frac{132}{500} = 0,264$. Koll om normalapproximation ok: $np(1-p) = 97,152 > 5$ ok.

$$z = \frac{0,264 - 0,30}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{500}}} \approx -1,76$$

Eftersom $-1,76 > -1,96$, behåll H_0.

(c) Typ I-fel: Risken att förkasta H_0 när den är sann. Här är den 5%,

5. Regressionsanalys

(a) Korrelationen ges i Excels utdatasammanfattning som ”Multipel-R” med värdet 0,9828.

(b) Regressionslinje: $\hat{y} = b_0 + b_1 x$. Med $b_0 \approx 1577,28$ och $b_1 \approx 77,28$ fås

$$\hat{y}(65) = 1577,28 + 77,88 \cdot 65 = 6639,48 \approx 6640 : -.$$

(c) Konfidensintervall för lutningen b_1:

$$b_1 \pm t_{n-2,1-\alpha/2} \cdot SE(b_1) \qquad \text{ger} \qquad [62,3; 93,5]$$

(använda värden $t_{4;0,95} = 2,132$ (tabell); $SE(b_1) = 7,33$ (Excel))