

TNA001- Matematisk grundkurs

Tentamen 2016-10-28 - Lösningsskiss

1. a)

$$\frac{x-1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \leq 0$$

Sedvanligt teckenschema visar att detta är uppfyllt $\Leftrightarrow x \in [-1, 0[$.

Svar: $x \in [-1, 0[$.

b) Vi löser ekvationen $|x-1| = 2|x-2| - x$ genom att studera tre fall.

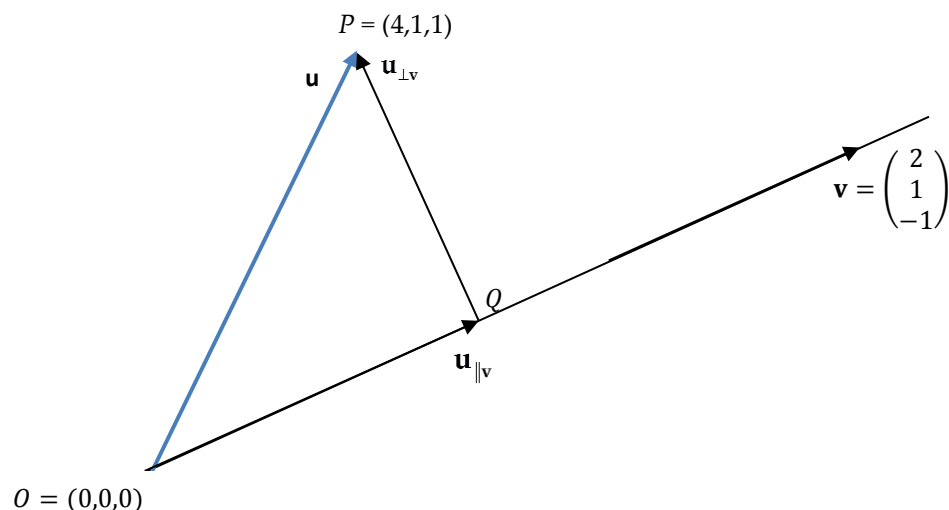
Fall 1: $x \leq 1$. Vi får ekvationen: $-x+1 = 2(2-x) - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, som inte duger ty $x = \frac{3}{2}$ tillhör inte aktuellt intervall.

Fall 2: $1 \leq x \leq 2$. Vi får ekvationen: $x-1 = 2(2-x) - x \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$, som duger ty $x = \frac{5}{4}$ tillhör det aktuella intervallet.

Fall 3: $x \geq 2$. Vi får ekvationen: $x-1 = 2(x-2) - x$, som saknar lösning.

Svar: $x = \frac{5}{4}$

2. a) Först ritas vi en figur/skiss, och observerar att origo ligger på linjen.



Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Av figuren ovan ser vi att vi skall söka $|\mathbf{u}_{\perp v}|$ där

$$\mathbf{u}_{\perp v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel v}$$

Av projektnsformeln får vi

$$\mathbf{u}_{\parallel v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och därmed

$$\mathbf{u}_{\perp v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Alltså är det sökta avståndet

$$|\mathbf{u}_{\perp v}| = \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \sqrt{16 + 1 + 49} = \frac{1}{3} \sqrt{66} \text{ l.e.}$$

Svar: $\frac{1}{3} \sqrt{66}$ l.e.

b) Med $t = 4$ insatt i L_1 :s ekvation får vi

$$x = 4 \cdot 2 = 8, \quad y = 4 \cdot 1 = 4, \quad z = 4 \cdot (-1) = -4$$

vilket innebär att punkten $(8, 4, -4)$ ligger på L_1 .

På samma sätt om vi sätter in $t = 1$ i L_2 :s ekvation får vi

$$x = 4 + 1 \cdot 4 = 8, \quad y = 1 + 1 \cdot 3 = 4, \quad z = 1 + 1 \cdot (-5) = -4$$

vilket innebär att punkten $(8, 4, -4)$ även ligger på L_2 .

Alltså är punkten $(8, 4, -4)$ gemensam för de båda linjerna, v.s.v.

c) Eftersom en normal, $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, till planet är vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

respektive $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, så skall det gälla att

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 4 & 3 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -t \\ B = 3t \\ C = t \end{cases}$$

och vi kan välja normalen $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Planets ekvation är därmed, om vi använder att punkten $(8, 4, -4)$ ligger i planet,

$$1 \cdot (x - 8) - 3 \cdot (y - 4) - 1 \cdot (z + 4) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - z = 0$$

Anm 1: Det är även "uppenbart" att origo ligger i planet eftersom origo ligger på L_1 . Om vi använder den punkten får vi mera direkt ekvationen $x - 3y - z = 0$.

Anm 2: Eftersom de båda linjernas riktningsvektorer spänner upp det plan linjerna ligger i och origo ligger i planet så får vi planets ekvation på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Svar: En ekvation för planet är $x - 3y - z = 0$ eller $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}.$

3. a) Se kursboken sid. 92 och figur 2.30 sid. 93.

b)

$$\begin{aligned} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= -\sin x \Leftrightarrow [\text{ty } \sin(-x) = -\sin x] \\ &\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x) \Leftrightarrow \\ 2x + \frac{\pi}{3} &= -x + n \cdot 2\pi \text{ eller } 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - (-x) + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow \\ 3x &= -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow \\ x &= -\frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ eller } x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Svar: $x = -\frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ eller $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

c) På (t.ex.) intervallet $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ är f strängt växande och vi får alltså där en invers på så stort intervall som möjligt. Vi har

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12},$$

Med $D_f = \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ får vi (som förväntat) $V_f = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$ (KONTROLLERA!).

Vi söker inversen på det aktuella intervallet:

$$y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right] \Leftrightarrow \arcsin y = 2x + \frac{\pi}{3}, y \in [-1, 1] \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-\frac{\pi}{3} + \arcsin y}{2}, y \in [-1, 1]$$

Alltså:

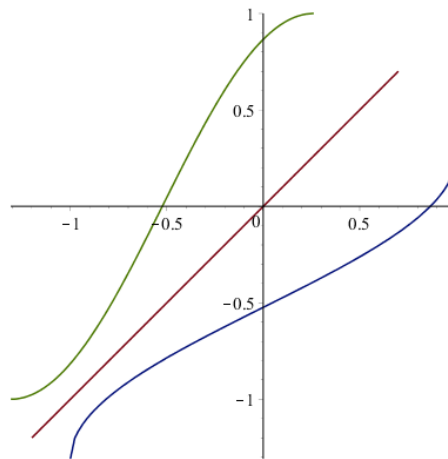
$$f^{-1}(x) = \frac{-\frac{\pi}{3} + \arcsin x}{2}, x \in [-1, 1]$$

med

$$V_{f^{-1}} = \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{-\frac{\pi}{3} + \arcsin x}{2}, D_{f^{-1}} \in [-1, 1]$ och $V_{f^{-1}} = \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$

Som illustration (behöver inte göras för att lösningen skall vara fullständig) ritas vi graferna till $y = f(x), x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ och $y = f^{-1}(x), x \in [-1, 1]$ och $y = x$ i samma koordinatsystem och får figuren nedan, där $y = f(x)$ är den övre grafen.



4.

a) Vi har $|z_1| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Alltså

$$z_1 = 4 - 4i = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Vi får

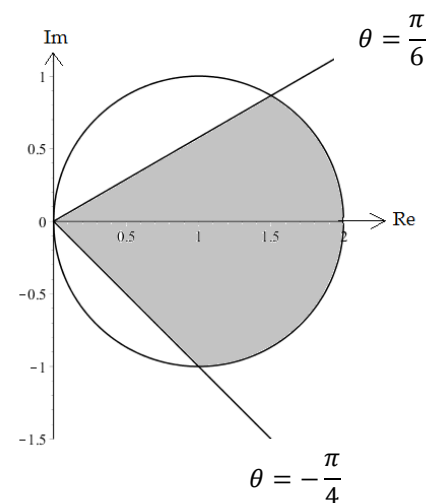
$$(z_1 z_2)^{12} = \left(4\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\pi/6} \right)^{12} = (4\sqrt{2})^{12} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)^{12} = 2^{30} e^{-i\pi} = -2^{30}$$

Svar: $(z_1 z_2)^{12} = -2^{30}$

b) Eftersom $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$ och $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ så ger det första villkoret att $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{6}$. Detta är uppfyllt för alla komplexa tal z som i det komplexa talplanet ligger på och mellan strålarna $\theta = -\frac{\pi}{4}$ och $\theta = \frac{\pi}{6}$, se figur.

Villkoret $|z - 1| \leq 1$ är uppfyllt av alla z ligger på cirkelskivan med radie 1 och medelpunkt i $(1, 0)$, se figur

Vi söker snittmängden mellan dessa områden i komplexa talplanet och får alla komplexa tal z som ligger i det skuggade området i figuren till höger.



5. a) Termerna i ekvationen är alla definierade för alla x som samtidigt uppfyller de tre villkoren

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, \quad x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2, \quad x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

Detta är uppfyllt för alla $x > 2$

Alltså:

$$\begin{aligned} \ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x+3) &= \ln 12, x > 2 \Leftrightarrow \\ \ln[(x-1)(x-2)(x+3)] &= \ln 12, x > 2 \Leftrightarrow [\text{ty } \ln - \text{funktionen är omvändbar}] \\ (x-1)(x-2)(x+3) &= 12, x > 2 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0, x > 2 \Leftrightarrow (\text{lös tredjegradsekv på sedvanligt sätt}) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(tredjegradsekvationens övriga lösningar, $x = -2, x = -1$ uppfyller inte villkoret $x > 2$)

Svar: Ekvationen har lösningen $x = 3$.

b) På motsvarande sätt som i a)-uppgiften har vi att olikhetens alla termer är samtidigt definierade om $x > 2$.

Alltså

$$\begin{aligned} \ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x+3) &\leq \ln 12, x > 2 \Leftrightarrow \\ \ln[(x-1)(x-2)(x+3)] &= \ln 12, x > 2 \Leftrightarrow [\text{ty } \ln - \text{funktionen är strängt växande}] \\ (x-1)(x-2)(x+3) &\leq 12, x > 2 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 \leq 0, x > 2 \Leftrightarrow \\ (x-3)(x+1)(x+2) &\leq 0, x > 2 \Leftrightarrow (\text{gör teckensudium!}) \\ x &\in \left(\underbrace{]-\infty, -1] \cup [-2, 3]}_{\text{ges av teckenstudiet}} \right) \cap]2, \infty[=]2, 3] \end{aligned}$$

Svar: $x \in]2, 3]$

6. Vi visar sambandet med induktion.

Steg I: För $n = 1$ har vi

$$VL(1) = \sum_{k=1}^1 k 2^k = 1 \cdot 2^1 = 2$$

och

$$HL(1) = (1-1)2^{1+1} + 2 = 0 + 2 = 2$$

Alltså gäller sambandet för $n = 1$.

Steg II: Vi antar att sambandet gäller för godtyckligt fixt $n = p, p \in \mathbb{Z}^+$, d.v.s. att

$$VL(p) = \sum_{k=1}^p k 2^k = (p-1) \cdot 2^{p+1} + 2 = HL(p)$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} k 2^k = \left(\sum_{k=1}^p k 2^k \right) + (p+1)2^{p+1} = [\text{enligt antagandet}] = \\ &= (p-1) \cdot 2^{p+1} + 2 + (p+1)2^{p+1} = 2^{p+1}(p-1+p+1) + 2 = 2p2^{p+1} + 2 = \\ &= p2^{p+2} + 2 = ((p+1)-1)2^{(p+1)+1} + 2 = HL(p+1) \end{aligned}$$

Därmed har vi visat att om sambandet gäller för $n = p$ så gäller det för $n = p + 1$.

Steg III

Sambandet gäller enligt Steg I för $n = 1$. Enligt Steg II gäller det då även för $n = 1 + 1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ och $n = 3 + 1 = 4$ o.s.v. Alltså gäller sambandet för alla $n \in \mathbb{Z}^+$, **v.s.v.**

7. a) Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vara tvådimensionella vektorer i ON-basen. Vi får då med den angivna definitionen

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2) = \frac{1}{4} \left(\left| \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \right|^2 - \left| \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \right|^2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left(\left(\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \right)^2 - \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) \right) = [\text{utveckla kvadraterna och förenkla}] = \\
&= \frac{1}{4} (4x_1x_2 + 4y_1y_2) = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \text{v.s.v.}
\end{aligned}$$

b) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta så har vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ samma längd (se figur), d.v.s. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Då blir högra ledet i den givna definitionen 0. Alltså $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (även med denna alternativa definition av skalärprodukt).

Svar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

