TENTAMEN

Datum:	1 april 2016
Tid:	XXX
Sal:	XXX
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Joakim Ekström, 01-363011
Kursadministratör:	Åsa Dahl, 011-363480
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

Ett teknikföretag tillverkar *M* olika plastprodukter. Plastprodukterna kan produceras i någon av *N* tillgängliga maskiner. För att planera produktionen under de kommande *T* veckorna har företaget definierat följande icke-negativa, kontinuerliga, variabler
x_{ijk}: antal enheter av produkt *i=1…M*, som produceras i maskin *j=1…N*, under vecka *k=1…T*.

a) Formulera nedanstående krav som linjära bivillkor som kan inkluderas i företagets produktionsplaneringsmodell. (4p)

i) Företagets produktion för varje vecka måste uppgå till minst q_i enheter av produkt *i=1…M*, för att möta marknadens efterfrågan.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \geq q_i, i = 1 \dots M, k = 1 \dots T$$

ii) Varje maskin *j* är tillgänglig t_{jk} timmar vecka *k*. Att tillverka en enhet av produkt *i* i maskin *j*, tar h_{ij} timmar. Säkerställ att den tillgängliga tiden inte överskrids för respektive maskin och vecka.

$$\sum_{i=1}^{M} h_{ij} x_{ijk} \leq t_{jk}, j = 1 \dots N, k = 1 \dots T$$

iii) Produkt 5 och 10 innehåller en särskild kemikalie som är bristvara de kommande *T* veckorna. Därför kan endast totalt *p* enheter av produkt 5 och 10 tillverkas under de kommande *T* veckorna.

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{T} x_{5,jk} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{T} x_{10,jk} \leq p$$

b) Anta att *M=20*, *N=4* och *T=10*, ange för varje typ av krav ovan hur många bivillkor som kravet ger upphov till. (1p)

i: 200, ii: 40, iii: 1

(5p) Uppgift 2

Ett musteri köper in äpplen från lokala odlare för att producera äppelmust. Äpplena klassas i tre olika klasser; standard, fin och prima.

För 1 flaska must behövs 1 kg äpple. Två olika sorters must tillverkas:
Vardagsmust som säljs för 15kr/flaska, och som måste innehålla minst 40% äpplen av klass fin eller prima.
Helgmust som säljs för 20kr/flaska, och som måste innehålla minst 60% äpplen av klass prima.

Totalt kan följande mängder äpplen köpas in för att producera must den kommande månaden:
Standard: 30 ton till priset 1kr/kg
Fin: 10 ton till priset 3kr/kg
Prima: 20 ton till priset 7kr/kg

Företaget räknar med att all producerad must kan säljas.

Företagets problem att maximera vinsten för den kommande månaden (intäkt minus kostnad) har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem och sedan lösts med AMPL/CPLEX.

Variabel definition:
x_{ij}: antal kg äpplen av kvalitet *i* som används i mustsort *j*, *i=(s)tandard, (f)in, (p)rima* , *j=(V)ardag, (H)elg*

$$\max z = 15(x_{sV} + x_{fV} + x_{pV}) + 20(x_{sH} + x_{fH} + x_{pH}) - 1(x_{sV} + x_{sH}) - 3(x_{fV} + x_{fH}) - 7(x_{pV} + x_{pH})$$

då

$x_{sV} + x_{sH} \leq 30000$ (tillgång på äpplen (i kg) av kvalitet standard)
$x_{fV} + x_{fH} \leq 10000$ (tillgång på äpplen (i kg) av kvalitet fin)
$x_{pV} + x_{pH} \leq 20000$ (tillgång på äpplen (i kg) av kvalitet prima)
$-0.4x_{sV} + 0.6x_{fV} + 0.6x_{pV} \geq 0$ (minst 40 % äpplen av klass fin eller prima i Vardagsmust)
$-0.6x_{sH} - 0.6x_{fH} + 0.4x_{pH} \geq 0$ (minst 60 % äpplen av klass prima i Helgsmust)
$x_{sV}, x_{sH}, x_{fV}, x_{fH}, x_{pV}, x_{pH} \geq 0$ (icke-negativitet)

Se nästa sida för frågor

Utgå från utdata nedan och besvara följande frågor. (*Visa tydligt hur du kommer fram till ditt svar*)

a) Hur många flaskor av Vardagsmust samt Helgmust kommer att tillverkas? (1p)
Eftersom 1kg äpple blir 1 flaska must så kan vi enkelt summera hur mycket äpplen som används för Vardsgsmust repektive Helgmust.
Vardagsmust: $\boldsymbol{x_{sV} + x_{fV} + x_{pV} = 30\,000}$ *flaskor*
Helgmust: $\boldsymbol{x_{sH} + x_{fH} + x_{pH} = 30\,000}$ *flaskor*

b) Hur skulle företagets vinst förändras (öka, minska eller oförändrad, samt storlek på ev. förändring) om de kunde köpa in 200kg äpplen ytterligare av kvalitet standard? (2p)
*Ges av skuggpriset för bivillkor "tillgång_standard". Efter en ökning med 200kg äpplen ligger fortfarande högerledskoefficienten inom intervallet 0 <=HL<=45000, dvs. värdet av en ökning med 200kg beräknas som 4*200*$= 800kr$.

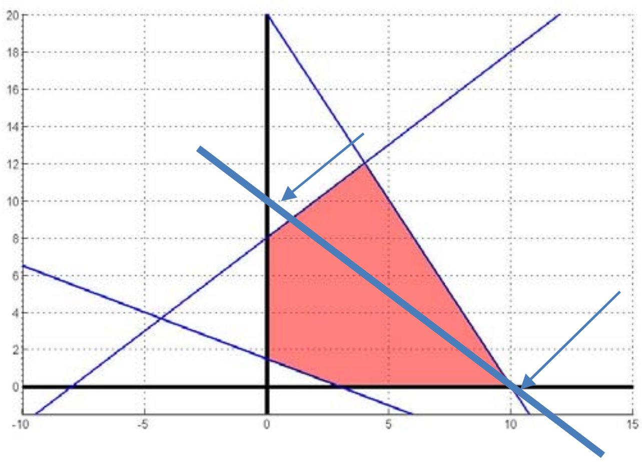
c) En odlare erbjuder musteriet att köpa upp ett restparti om 4 000kg äpplen av kvalitet prima för 50 000 kr. Bör musteriet anta erbjudandet? (2p)
*Skuggpriset för bivillkor "tillgång_prima" är 23, och är giltigt för en förändring från 20 000 till 22 500 kg äpplen. Därefter vet vi bara att skuggpriset som högst kan vara 23 och lägst 0. För förändringen upp till 22 500, dvs. en ökning med 2 500 kg äpplen tjänar musteriet 2500*23=57500kr. Därmed kan vi med säkerhet säga att företaget ska anta erbjudandet efter som de i sämsta fall tjänar 57500-50000=7500kr.*

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande maximeringsproblem:

$\max z = -x_1 - x_2$
då $-x_1 + x_2 \leq 8$ (bvk1)
$0.5x_1 + x_2 \geq 1.5$ (bvk2)
$x_1 + 0.5x_2 \leq 10$ (bvk3)
$x_1, x_2 \geq 0$

a) Illustrera och lös problemet grafiskt. Dvs. rita ut bivillkor och målfunktion (motsvarande målfunktionsvärdet 0), markera tydligt det tillåtna området och bestäm optimallösningen. (2p)



Optimallösningen är $x_1^* = 0, x_2^* = 1.5$ *med målfunktionsvärde -1.5.*

b) Vi **byter nu ut** bivillkor 2 mot $x_1 + x_2 \geq 1.5$. Övriga bivillkor och målfunktion behålls. Vilken/vilka punkter utgör optimallösningen i det nya problemet? Vad är det nya optimala målfunktionsvärdet? (2p)
Den nya optimala lösningen ges av linjen $x^* = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$*, där* $x^{(1)} = (0, 1.5)^T$, $x^{(2)} = (1.5, 0)^T$ *och* $0 \leq \lambda \leq 1$. *Det optimala målfunktionsvärdet är -1.5.*

c) Utgå från det ursprungliga problemet i uppgiften och formulera dualen till optimeringsproblemet. (1p)

$\min z = 8y_1 + 1.5\, y_2 + 10y_3$
då $-y_1 + 0.5y_2 + y_3 \geq -1$
$y_1 + y_2 + 0.5y_3 \geq -1$

$y_1, y_3 \geq 0, y_2 \leq 0$

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

max $z = x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4$
då $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20$
$x_3 \leq 5$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

a) Formulera om problemet på standardform. (1p)
max $z = x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4$
då $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + s_1 = 20$
$x_3 + s_2 = 5$
$2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 10$
$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

b) Ställ upp en initial simplextablå för problemet, använd origo som en initialt tillåten baslösning. Vad är målfunktionsvärdet i initialtablån? (1p)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	-1	-1	-3	5				0
s_1		1	2	2	1	1			20
s_2				1			1		5
s_3		2	1	1				1	10

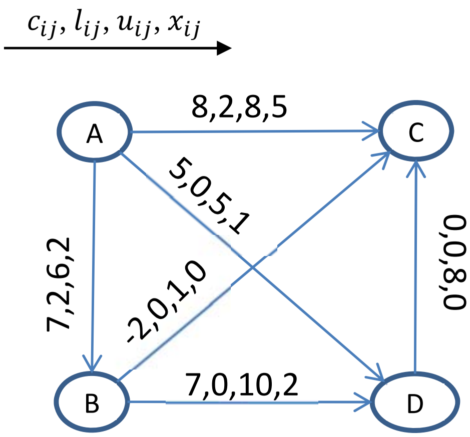
Initialt målfunktionsvärde: 0.

c) Genomför en iteration med simplexmetoden. Dvs. bestäm inkommande och utgående basvariabler, samt uppdatera simplextablån. Vad är det nya målfunktionsvärdet? (3p)
Inkommande: x_3, utgående: s_2. Nytt målfunktionsvärde: 15.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}$
z	1	-1	-1		5		3		15
s_1		1	2		1	1	-2		10
x_3				1			1		5
s_3		2	1				-1	1	5

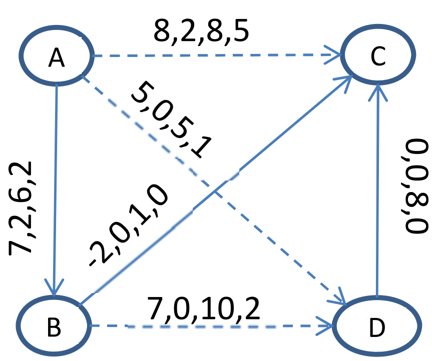
(5p) Uppgift 5

Betrakta följande minkostandsflödesnätverk. Nod A är en källa med styrka 8 och Nod C och D är sänkor med styrkor 5 respektive 3. Varje båge är märkt med kostnad (c_{ij}), undre gräns (l_{ij}), övre gräns (u_{ij}), samt aktuellt flöde (x_{ij}).



Visa att lösningen ej är optimal. Gör en iteration med simplexmetoden för minkostnadsflödesnätverk och avgör om den nya lösningen är optimal. (*Om lösningen fortfarande inte är optimal behöver du inte göra fler iterationer*). (5p)

Basbågar streckade i figuren nedan. Nodpriser: A: 0, B: -2, C: 8, D: 5



Beräkna red. kostnader för icke-basbågar:
$\bar{c}_{AB} = 7 + 0 - (-2) = 9 \;\; x_{AB} = l_{AB}$ ok
$\bar{c}_{BC} = -2 + (-2) - 8 = -12 \;\; x_{BC} = l_{BC}$ ej ok
$\bar{c}_{DC} = 0 + 5 - 8 = -3 \;\; x_{DC} = l_{DC}$ ej ok

(B,C) inkommande, bildar cykel B-C-A-D-B
Tillåtna flödesförändringar i cykeln:
(B,C) öka max 1
(A,C) minska max 3
(A,D) öka max 4
(B,D) minska max 2
(B,C) utgående

Nytt flöde