TENTAMEN

Datum:	10 januari 2018
Tid:	14-18
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Marcus Posada, 011-363564
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

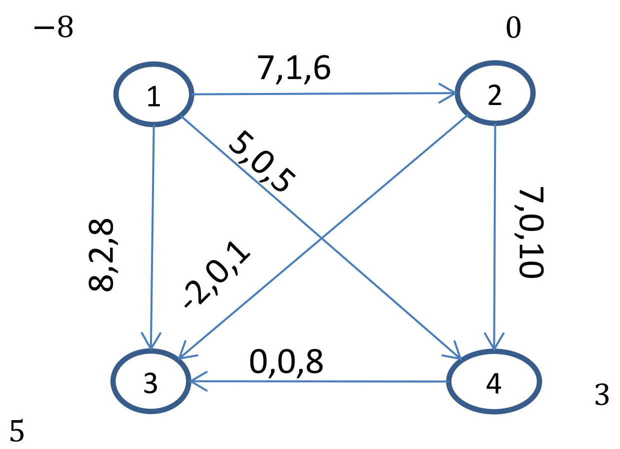
a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$$\min z = 7x_{12} + 8x_{13} + 5x_{14} - 2x_{23} + 7x_{24}$$

då

$$-x_{12} - x_{13} - x_{14} = -8$$
$$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 5$$
$$x_{14} + x_{24} - x_{43} = 3$$
$$1 \leq x_{12} \leq 6$$
$$2 \leq x_{13} \leq 8$$
$$0 \leq x_{14} \leq 5$$
$$0 \leq x_{23} \leq 1$$
$$0 \leq x_{24} \leq 10$$
$$0 \leq x_{43} \leq 8,$$

som beskriver ett minkostnadsflödesproblem där x_{ij} beskriver flöde mellan noderna i och j. Din uppgift är att utifrån den matematiska modellen formulera problemet som ett minkostnadsflödesnätverk, inklusive bågdata (undregräns, övregräns samt kostnad) och samtliga nodstyrkor. *Observera att du inte ska ta fram ett tillåtet flöde.* (2p)



b) Ett företag tillverkar fyra olika produkter (benämnda A, B, C och D) vid fyra produktionslinjer (benämnda 1, 2, 3 och 4). På en produktionslinje kan flera olika produkter tillverkas, och tillverkningen av en produkt kan delas upp på flera produktionslinje. I samband med att företaget formulerar en matematisk modell för att optimera sin produktion har följande variabler definierats

x_{ij} = antal enheter av produkt i som produceras på produktionslinje j, i=*A*,*B*,*C*,*D* , j=*1*,*2*,*3*,*4* under den kommande månaden

Använd de definierade variablerna ovan och skapa bivillkor som säkerställer att följande uppfylls

i) Totalt ska det produceras e_i enheter av respektive produkt den kommande månaden.

ii) Det totala antalet enheter som produceras på respektive produktionslinje får inte överstiga f_j enheter den kommande månaden.

iii) Den totala produktionen av produkt *A* och *B* på produktionslinje *2* och *3* får inte överstiga *P* enheter den kommande månaden.
(3p)

i) $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = e_i, i = A, B, C, D$

ii) $\sum_{i=A}^{D} x_{ij} \leq f_j, j = 1,2,3,4$

iii) $x_{A2} + x_{B2} + x_{A3} + x_{B3} \leq P$

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar bord och stolar. Företaget har identifierat två kritiska moment i produktionskedjan som varje möbel måste gå igenom: montering och målning, och vill planera sin produktion för de närmaste två månaderna. Arbetstidsåtgången för montering/målning samt företagets tillgängliga arbetstid under de två månaderna står i tabellen nedan.

	Tidsåtgång (h)		Tillgänglig tid (h)	
	Bord	Stol	Månad 1	Månad 2
Montering	2	0,5	1200	2200
Målning	0,7	0,3	1000	1000

Om inte arbetstiden räcker kan företaget köpa in extra arbetstid (i monteringsstadiet, inte för målning) för 220 kr/h. Det finns 1000 extra timmar tillgängliga i månad 1 och 800 extra timmar tillgängliga i månad 2. Det begränsande råmaterialet för möbeltillverkningen är trä. Företaget kan köpa in trä för 23 kr/enhet under månad 1 och 30 kr/enhet under månad 2. För att tillverka ett bord krävs det 10 enheter trä och en stol kräver 4 enheter trä. Förtjänsten för ett bord är 900 kr, för en stol är den 300 kr. Företaget har ett trälager med en maxkapacitet på 4000 enheter som kostar 3 kr/enhet mellan månad 1 och 2. Initialt är lagret halvfullt. Företagets problem att maximera vinsten för de kommande två månaderna (intäkt minus kostnad för trä och övertid) har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem och sedan lösts med AMPL/CPLEX.

Variabeldefinitioner:
$x_{it} =$ antal enheter av i som tillverkas månad t, där $i = B(ord), S(tol)$ och $t = 1, 2$
$l =$ antal enheter trä som lagras från månad 1 till 2
$y_t =$ antal enheter trä som köps in månad t
$o_t =$ antal timmar övertid som köps in under månad t
Parametrar:
$T_t =$ antal timmar övertid tillgängliga under månad t
$M_t =$ antal timmar tillgängliga för montering under månad t
$N_t =$ antal timmar tillgängliga för målning under månad t

$\max z = 900(x_{B1} + x_{B2}) + 300(x_{S1} + 3x_{S2}) - 3l - 220(o_1 + o_2) - 23y_1 - 30y_2$
då
$o_t \leq T_t, \quad t = 1, 2 \quad (Max\ övertid)$
$2x_{Bt} + 0{,}5x_{St} \leq M_t + o_t, \quad t = 1, 2 \quad (Montering)$
$0{,}7x_{Bt} + 0{,}3x_{St} \leq N_t, \quad t = 1, 2 \quad (Målning)$
$l = 2000 + y_1 - 10x_{B1} - 4x_{S1}, \quad (Lagerbalans\ månad\ 1)$
$0 = l + y_2 - 10x_{B1} - 4x_{S1}, \quad (Lagerbalans\ månad\ 2)$
$l \leq 4000, \quad (Maxlager)$
$x_{B1}, x_{B2}, l, y_1, y_2, o_1, o_2 \geq 0, \quad (Icke - negativitet)$

```
CPLEX 12.6.1.0: sensitivity
CPLEX 12.6.1.0: optimal solution;
objective 1368720
6 dual simplex iterations (4 in phase I)

:   _varname              _var      _var.rc     :=
1   produktion['Bord',1]  640       0
2   produktion['Bord',2]  640       0
3   produktion['Stol',1]  1840      0
4   produktion['Stol',2]  1840      0
5   lager                 4000      0
6   inköp[1]              15760     0
7   inköp[2]              9760      0
8   övertid[1]            1000      0
9   övertid[2]            0         -4
;

:   _varname              _var.down  _var.current  _var.up :=
1   produktion['Bord',1]  898.667    900           1062
2   produktion['Bord',2]  720        900           903.333
3   produktion['Stol',1]  259.5      300           300.571
4   produktion['Stol',2]  298.571    300           377.143
5   lager                 -7         -3            1,00E+20
6   inköp[1]              -25        -23           1,00E+20
7   inköp[2]              -50        -30           -26
8   övertid[1]            -221.6     -220          1,00E+20
9   övertid[2]            -1,00E+20  -220          -216
;

:   _conname            _con.slack  _con.dual   :=
1   ÖvertidsBegr[1]     0           1.6
2   ÖvertidsBegr[2]     800         0
3   MonteringsBegr[1]   0           221.6
4   MonteringsBegr[2]   0           216
5   MålningsBegr[1]     0           324
6   MålningsBegr[2]     0           240
7   LagerSamband1       0           23
8   LagerSamband2       0           30
9   LagerBegr           0           4
;

:   _conname            _con.down   _con.current  _con.up :=
1   ÖvertidsBegr[1]     966.667     1000          1085.71
2   ÖvertidsBegr[2]     0           800           1,00E+20
3   MonteringsBegr[1]   1166.67     1200          1285.71
4   MonteringsBegr[2]   2166.67     2200          2285.71
5   MålningsBegr[1]     970         1000          1020
6   MålningsBegr[2]     970         1000          1020
7   LagerSamband1       -1,00E+20   2000          17760
8   LagerSamband2       -1,00E+20   0             9760
9   LagerBegr           0           4000          13760
;
```

a) Hur förändras målfunktionsvärdet, storlek och riktning av förändringen (+/-/oförändrad), om tillgången på extra arbetstiden i månad 2 minskar från 800 timmar till 600 timmar? (1p)

Inte alls, dvs. oförändrad. Nu finns ett slack om 800h outnyttjad extra arbetstid.

b) Hur förändras målfunktionsvärdet, storlek och riktning av förändringen (+/-/oförändrad), om kostnaden för den extra arbetstiden i månad 1 minskar från 220 till 200 kr/timma? (2p)

I månad 1 utnyttjas 1000h extra arbetstid. Intervallet för målfunktionskoefficienten för övertid är -221.6 till plus oändligheten, alltså är optimallösningen oförändrad vid en minskning till 200kr/timma (kom ihåg minustecknet i modellen). Målfunktionsvärdet kommer därför att öka med 20*1000kr=20 000kr.

c) Ett bemanningsföretag erbjuder att förse företaget med personal till målningsmomentet i månad 2 motsvarande 30 timmar, till en kostnad av 4000 kr. Bör företaget anta erbjudandet? (2p)

Att få tillgång till en timma ytterligare tid för målning är värt 240kr i månad 2. Dock bara giltigt för en ökning med 20 timmar. Här erbjuds 30 timmar. Då vet vi att i bästa fall är det värt 240kr även vid en större ökning är 20 timmar, och i sämsta fall är det värt 0 kr efter en ökning med 20 timmar. Detta ger en förändring av målfunktionsvärdet i intervallet [20*240

30*240], dvs. [4800 7200] kr. Företaget tjänar alltså helt säker mer än kostnaden 4000kr och bör anta erbjudandet.

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande linjära optimeringsproblem

$\max z = x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4$

då $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 25$

$x_4 \leq 5$

$2x_1 + x_2 + x_4 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

a) Formulera om problemet på standardform. (1p)
b) Utifrån din lösning till a-uppgiften, bestäm en tillåten baslösning till problemet. (2p)
c) Utifrån din lösning till b-uppgiften, bestäm reducerade kostnader för samtliga icke-basvariabler. (2p)

Standardform:

$\max z = x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4$

då $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 25$

$x_4 + x_6 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_4 + x_7 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Tillåten baslösning

Basvariabler: x_5, x_6, x_7, övriga är icke-basvariabler. Tillåten baslösning

$$x = (0\ 0\ 0\ 0\ 25\ 5\ 10)^T$$

Reducerade kostnader erhålls genom att formulera om målfunktionen som funktion av icke-basvariabler (vilket den redan är formulerad som), dvs. reducerade kostnader för icke-basvariablerna x_1, x_2, x_3 och x_4 är [1 1 -5 3]

b och c kan även lösas genom att sätta upp problemet i simplextablå

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande simplextablå för ett minimeringsproblem, där några av värdena ersatts med *a*, *b* och *c*.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
z	1	0	-0.5	a	0	0	b	2.5	17.5
x_5	0	0	1.5	1	0	1	-1.5	-0.5	12.5
x_4	0	0	0	0	1	0	5	0	5
x_1	0	1	0.5	0	0	0	-0.5	c	2.5

a) Vilka variabler utgör basvariabler i tablån ovan? (1p)

$$x_1, x_4, x_5$$

b) Ange den aktuella lösningen (samtliga variablers värden) i tablån ovan. (1p)

$$x = (2.5\ 0\ 0\ 5\ 12.5\ 0\ 0)^T$$

c) För vart och ett av fallen nedan, ge exempel på värden på *a*, *b* och *c* som gör att respektive fall inträffar. (3p)

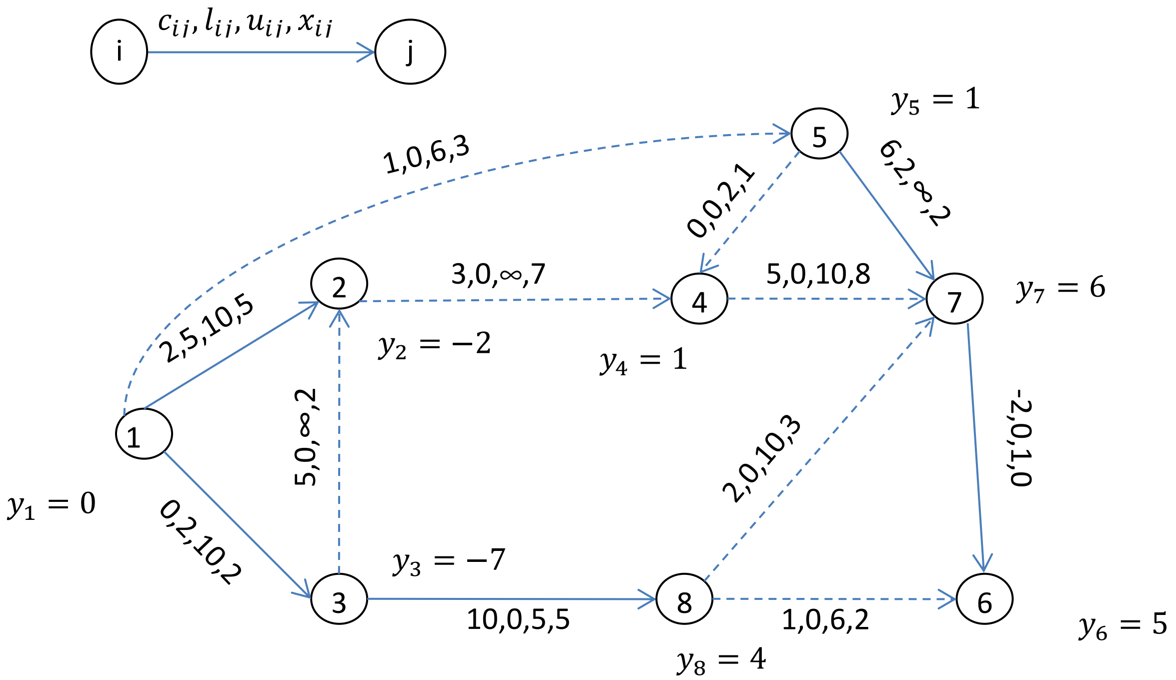
i) x_6 är *inkommande* och efter nästa iteration är målfunktionsvärdet 12.5.
för x_6 kan endast x_4 vara utgående, hela x_4 raden kommer då divideras med 5 och högerledet blir 5/5=1. Dvs. steglägden är 1. Om *b* =5, måste den nya x6 raden multipliceras med -5 och adderas till målfunktionsraden, samtidigt erhålls då 12.5 som målfunktionsvärde. *a* måste sättas till <5 för att x_6 ska vara inkommande. *c* kan anta vilka värden som helst

ii) x_5 blir *utgående* i nästa iteration. x_5 kan bara bli utgående om x_3 är inkommande, vilket inträffar om *a>2.5* och *b<a*, *c* kan anta vilka värden som helst

iii) x_7 är *inkommande* och efter att nästa iteration har genomförts antar x_7 värdet 5.
för att x_7 ska bli inkommande måste *a<2.5, b<2.5.2* För att erhålla variabelvärdet 5 efter nästa iteration måste *c=0.5.* Då x_1 raden divideras med 0.5 erhålls variabelvärdet 5 i nya x_7 raden.

(5p) Uppgift 5

Betrakta nedanstående minkostnadsflödesnätverk. Nod 1 och 3 är källor med styrka 10 respektive 5, och nod 6 och 7 är sänkor med styrka 2 respektive 13. Varje båge är märkt med kostnad, undre gräns, övre gräns, samt aktuellt flöde.



a) Ta fram ett basträd samt nodpriser, och visa att lösningen inte är optimal (2p)

Basträd och nodpriser markerat i figuren (basbågar streckade)

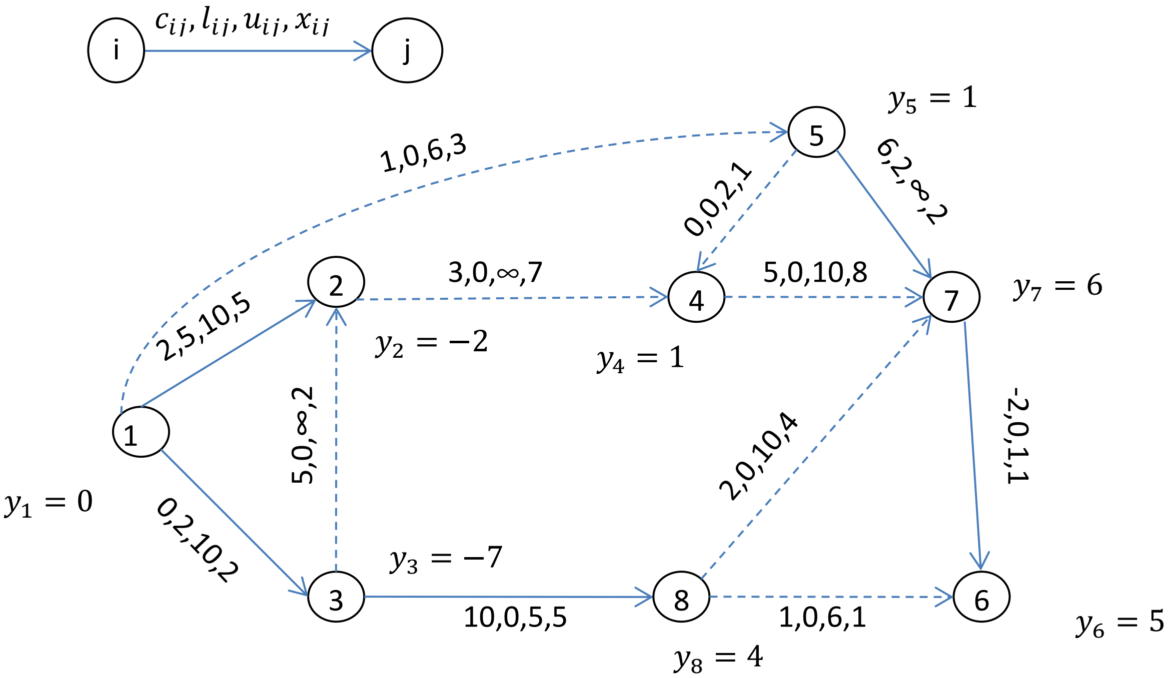
Bestäm reducerad kostnad och avgör optimallitet för icke-basbågar
$\bar{c}_{12} = 2 + 0 - (-2) = 4, x_{12} = l_{12}$ ok
$\bar{c}_{13} = 0 + 0 - (-7) = 7, x_{13} = l_{13}$ ok
$\bar{c}_{38} = 10 - 7 - 4 = -1, x_{38} = u_{38}$ ok
$\bar{c}_{57} = 6 + 1 - 6 = 1, x_{57} = l_{57}$ ok
$\bar{c}_{76} = -2 + 6 - 5 = -1, x_{76} = l_{76}$ ej ok

Lösningen är ej optimal då båge 76 bryter mot optimallitetsvillkoret

b) Gör en iteration med simplexmetoden för minkostnadsflödesproblem. Avgör om den nya lösningen är optimal (3p)

Båge (7,6) inkommande. Bildar cykel 7-6-8-7
Max flödesförändring i cykeln
(7,6) öka max 1
(8,6) minska max 2
(8,7) öka max 7

Båge (7,6) begränsar först och blir utgående. Ny lösning i nätverket nedan



Notera att nodpriserna är oförändrade. Dvs. samtliga reducerade kostnader oförändrade
$\bar{c}_{12} = 2 + 0 - (-2) = 4, x_{12} = l_{12}$ ok
$\bar{c}_{13} = 0 + 0 - (-7) = 7, x_{13} = l_{13}$ ok
$\bar{c}_{38} = 10 - 7 - 4 = -1, x_{38} = u_{38}$ ok
$\bar{c}_{57} = 6 + 1 - 6 = 1, x_{57} = l_{57}$ ok
$\bar{c}_{76} = -2 + 6 - 5 = -1, x_{76} = u_{76}$ ok

men tack vare flödeförändringen är nu lösningen optimal.