TNA001 - FÖ 3 Kap 1.4 (fr.o.m. sid. 27), Kap 1.5 (t.o.m. sid 33)

1.4 Allmänna polynomekvationer

a) Vad menas med ett *polynom* och en *polynomekvation*?

b) Vad menas med *polynomdivision*? Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel 12
Skriv det rationella uttrycket $\frac{2x^3-3x^2-27}{x^2-9}$ som en summa av ett polynom och ett rationellt uttryck.

c) *Faktorsatsen* (Sats 1.2 sid. 28 i FN)

Exempel 13
a) Faktorisera i förstagradsfaktorer polynomet $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3$.
b) Bestäm rötterna till polynomekvationen $16 + 20x + 2x^2 - 2x^3 = 0$ (tredjegradekvation).

Anm: På föreläsningen kommer vi att först lösa a)-uppgiften och sedan, med hjälp av denna, dra slutsatser om b)-uppgiften.

Nedan följer en fullständig lösning till Ex 13b), utan att vi först gjort a). I lösningen ingår en polynomdivision som dock inte redovisas här. *Lägg märke till att vi, då vi löser den uppkomna andragradsekvationen, dividerar med faktorn* -2, *som ju förstås skall finnas med i lösningen till a)-uppgiften!*

Ex 13 b) Bestäm rötterna till polynomekvationen $16+20x+2x^2-2x^3=0$

Låt $p(x) = 16 + 20x + 2x^2 - 2x^3$. Vi ser (prövning) att $x = -1$ är en lösning till ekvationen, d.v.s. $p(-1) = 0$. Då är, enligt faktorsatsen, $x - (-1) = x + 1$ faktor i p. Alltså kan vi skriva den givna ekvationen

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)k(x) = 0$$

Genom polynomdivisionen $\frac{p(x)}{x+1} = k(x)$ (visas alltså inte här) får vi $k(x) = -2x^2 + 4x + 16$ och därmed ges ev. övriga lösningar till den givna ekvationen av villkoret

$$-2x^2 + 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \text{/kvadratkomplettera/}$$

$$(x - 1)^2 - 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$x = -2 \text{ eller } x = 4$$

Svar: Ekvationen har lösningarna $x = -1$, $x = -2$ eller $x = 4$.

1.5 Olikheter

a) Vi illustrerar hur man bestämmer **lösningsmängden till olikheter** med hjälp av ett par exempel.

Exempel 14

Lös olikheten a) $\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x}$ b) $x^2 > 5$ c) $2x^2 + 1 > 3x$

c) Vi flyttar över och faktoriserar, vilket ger

$$2x^2+1>3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\right]>0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{8}{16}\right]>0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]>0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]>0 \Leftrightarrow \text{/konjugatregeln/}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)>0 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)>0.$$

Teckenstudium:

		$\frac{1}{2}$		1		x
2	+	+	+	+	+	
$x-\frac{1}{2}$	-	0	+	+	+	
$x-1$	-	-	-	0	+	
$2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$	+	0	-	0	+	

Vilket ger lösningsmängden $x \in L = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]1, \infty[$.

<u>Svar</u>: Olikheten har lösningsmängden $x \in L = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]1, \infty[$.

Vad menas med en fullständig lösning?
(Se även kursinformationen!)

Exempel 15
Om vi har till uppgift (Ex 14b) att bestämma lösningsmängden till olikheten $\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x}$ *kan* en fullständig lösning se ut på följande sätt:

- Vi flyttar alla termer till VL. För den givna olikheten har vi

$$\frac{3}{x-1} \leq -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} \leq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Gör liknämnigt}} \frac{3x+2(x-1)}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2x-2}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x(x-1)} \leq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Faktorisera}} \frac{5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x(x-1)} \leq 0$$

- Vi använder ett **teckenschema** för att studera det sista stegets olikhet:

x		0		$\frac{2}{5}$		1	
5	+	+	+	+	+	+	+
$x-\frac{2}{5}$	-	-	-	0	+	+	+
x	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x(x-1)}$	-	Ej def.	+	0	-	Ej def.	+

- Eftersom alla olikheter ovan är ekvivalenta så har vi av teckenschemat att den ursprungliga (givna) olikheten gäller för $x \in L =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{2}{5}, 1\right[$.

- **Kontroll:** Vi prövar med att sätta in några *lämpliga* x-värden i den ursprungliga (givna) olikheten
$x = -1$: VL $= \frac{3}{-1-1} = -\frac{3}{2}$, HL $= -\frac{2}{-1} = 2$ Alltså har vi VL ≤ HL
$x = \frac{1}{5}$: VL $= \frac{3}{\frac{1}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4}$, HL $= -\frac{2}{\frac{1}{5}} = -10$ Alltså har vi VL > HL
$x = \frac{2}{5}$: VL $= \frac{3}{\frac{2}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{3}{5}} = -5$, HL $= -\frac{2}{\frac{2}{5}} = -5$ Alltså har vi VL ≤ HL
$x = \frac{4}{5}$: VL $= \frac{3}{\frac{4}{5}-1} = \frac{3}{-\frac{1}{5}} = -15$, HL $= -\frac{2}{\frac{4}{5}} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$ Alltså har vi VL ≤ HL

- **Svar:** $x \in L =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{2}{5}, 1\right[$.