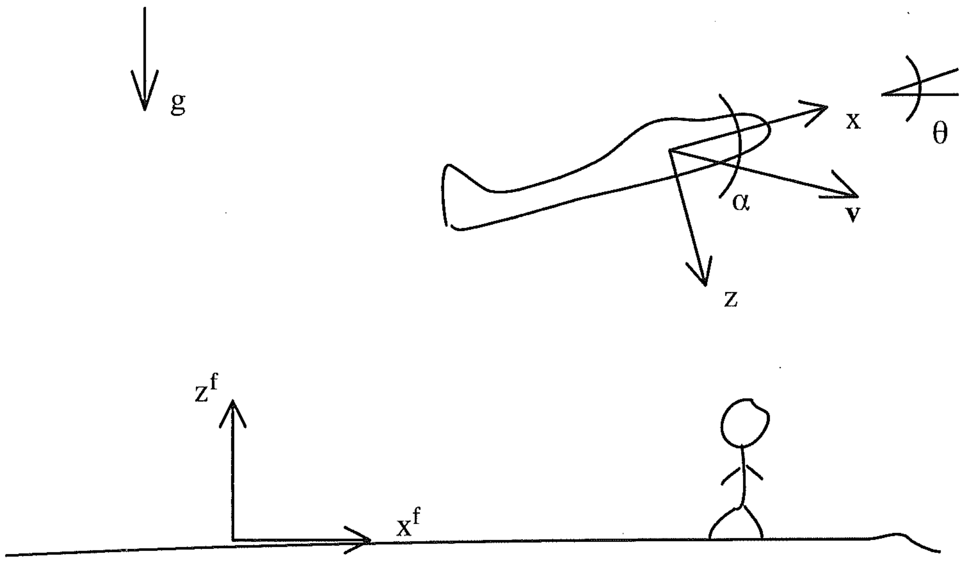
Beräkningsuppgift I

Vi skall studera ett flygplan som rör sig i xz–planet, dvs vi har med de frihetsgrader som brukar kallas de longitudinella. Vi har ett koordinatsystem Oxyz fast i flygplanet och ett koordinatsystem $Ox^fy^fz^f$ som är fast på jorden och antas vara ett inertialsystem.



Rörelseekvationer och kinematiska ekvationer

De longitudinella rörelseekvationerna för ett flygplan, tillsammans med kinematiska relationer för att bestämma orientering och läge, kan skrivas

$$\dot{u} = -qw - g\sin\theta + X/m$$

$$\dot{w} = qu + g\cos\theta + Z/m$$

$$\dot{q} = M/I_{yy}$$

$$\dot{\theta} = q$$

$$\dot{x}^f = u\cos\theta + w\sin\theta$$

$$\dot{z}^f = (-u\sin\theta + w\cos\theta)(-1) \tag{1}$$

där X, Z och M är krafter och moment på flygplanet bortsett från gravitationskraften, dvs aerodynamiska krafter och moment samt krafter och moment från motorn. Faktorn (−1) i sista ekvationen är till för att vända det jordfasta systemet så att z^f–axeln pekar uppåt. De båda nedre ekvationerna ger relationer mellan flygplanets hastighet i komponenter i det rörliga respektive fasta koordinatsystemet. Hastigheten är alltid tidsderivatan relativt en fast referens av lägesvektorn relativt en fix punkt, men denna vektor kan sedan uttryckas antingen i fasta eller rörliga koordinater. De båda övre ekvationerna är rörelseekvationerna i xz–planet uttryckt i det flygplansfasta koordinatsystemet, vilket roterar relativt det jordfasta kordinatsystemet. u och w är alltså hastighetsvektorns komponenter i ett roterande koordinatsystem och $\dot{u}$ och $\dot{w}$ är därmed komponenter av hastighetsvektorns tidsderivata relativt en roterande referens. Flygplanets acceleration är däremot hastighetsvektorns tidsderivata relativt en fast referens; dess komponenter i det roterande systemet blir $\dot{u} + qw$ och $\dot{w} - qu$.

Vi skall lösa dessa sex ekvationer numeriskt, till en början med initialvillkoren

$$u_i = V$$

$$w_i = 0$$

$$q_i = 0$$

$$\theta_i = 0$$

$$x_i^f = 0$$

$$z_i^f = H \qquad (2)$$

där V och H är hastigheten respektive höjden för flygtillståndet för dina aerodynamiska data. Om referenstillståndet avser flygning vid havsytan sätts H=100 m, för att undvika underjordisk flygning.

Uppgift 1

Implementera ekvationerna (1) ovan i MATLAB med X=Z=M=0. Genomför en beräkning under 100 s med initialvillkoren (2) ovan och plotta z^f som funktion av x^f, I avsaknad av aerodynamiska krafter och motorkrafter skall rörelsen givetvis bli en kastparabel. Verifiera slutpunkten i den numeriska beräkningen av kastparabeln med en analytisk beräkning.

Referenstillstånd

Vi kommer att använda en kraftmodell där de aerodynamiska krafterna är linjäriserade kring ett referenstillstånd. Vi antar att detta referenstillstånd är flygning med konstant hastighet längs en rät linje parallell med jordytan och med alla vinkelhastigheter noll. Vi har alltså trimmad flygning med krafter och moment i jämvikt i referenstillståndet. Vi väljer också att lägga x–axeln i hastighetens riktning i referenstillståndet så att tippvinkeln θ är noll i referenstillståndet. Låt index "0" beteckna referenstillståndet och sätt:

$$u_0 = V$$

$$w_0 = 0$$

$$q_0 = 0$$

$$\theta_0 = 0$$

$$x_0^f = 0$$

$$z_0^f = H \tag{3}$$

Flygtillståndet i databladet antas alltså vara ett trimmat tillstånd som vi väljer som referenstillstånd i vår modell. Genom att sätta in (3) i de tre första av ekvationerna (1) kan vi räkna ut X, Z och M, dvs krafterna utom gravitation, i referenstillståndet:

$$X/m = g\sin\theta_0 = 0$$

$$Z/m = -g\cos\theta_0 = -g$$

$$M/I_{yy} = 0 \tag{4}$$

där även antagandet att vi flyget parallellt med jordytan i referenstillståndet förts in som θ_0=0.

Uppgift 2

Implementera krafterna (4) och genomför en beräkning med initialvillkoren (2). Eftersom dessa initialvillkor innebär att vi släpper iväg beräkningen i det trimmade referenstillståndet bör resultatet bli en rät linje parallell med jordytan. Verifiera detta.

Kraftmodell

Vi antar, med en kraftig förenkling, att luftkrafterna på flygplanet kan skrivas som

$$X/m = g\sin\theta_0 + X_u(u - u_0) + X_w(w - w_0)$$

$$Z/m = -g\cos\theta_0 + Z_u(u - u_0) + Z_w(w - w_0)$$

$$M/I_{yy} = M_w(w - w_0) + M_q(q - q_0) \tag{5}$$

Detta är en linjär modell, som vi hoppas gäller någorlunda i närheten av referenstillståndet enligt ekvationerna (3).

Notera att (5) inte innehåller några termer för ändring i motorpådrag eller roderutslag som alltså antas vara konstanta.

Notera även att (5:3) normalt innehåller en term $M_{\dot{w}}(\dot{w} - \dot{w}_0)$ som har försummats här för att inte krångla till implementeringen.

Observera skillnaden mellan *initialtillstånd* och *referenstillstånd*. Initialtillståndet är det tillstånd vi släpper flygplanet ifrån när vi börjar beräkningen; referenstillståndet är det tillstånd omkring vilket vi valt att linjärisera vår luftkraftsmodell. Om vi hade haft en bättre kraftmodell hade vi inte infört något referenstillstånd.

Vi skall nu studera flygplanets rörelse för initialvillkoren

$$u_i = V$$

$$w_i = 0$$

$$q_i = 0$$

$$\theta_i = 0.1 \text{ rad}$$

$$x_i^f = 0$$

$$z_i^f = H \tag{6}$$

Vi befinner oss alltså i trimmat flygläge (före tiden t=0) med låsta roder då vi plötsligt (vid tiden t=0) får en störning i tippvinkel.

Uppgift 3

Implementera kraftmodellen (5). Genomför en beräkning med initialvillkoren (6) under 100 s, och plotta de sex fasvariablernas variation med tiden samt kurvor över $z^f(x^f)$ och anfallsvinkeln som funktion av tiden. Om kurvorna ser misstänkt darriga ut så ange bättre precision i MATLAB–funktionen `ode45`. För vissa datauppsättningar kan det vara nödvändigt att använda en längre simuleringstid, 200–400 s.

Rörelsen som beräknats skall bestå av en svängning med period av storleksordningen tiotals sekunder, som kallas phugoid–moden. Denna rörelse är vanligtvis svagt dämpad, men kan även vara svagt växande.

Tag fram periodtiden för rörelsen genom att mäta i någon av plottarna. Jämför med den grova approximationen

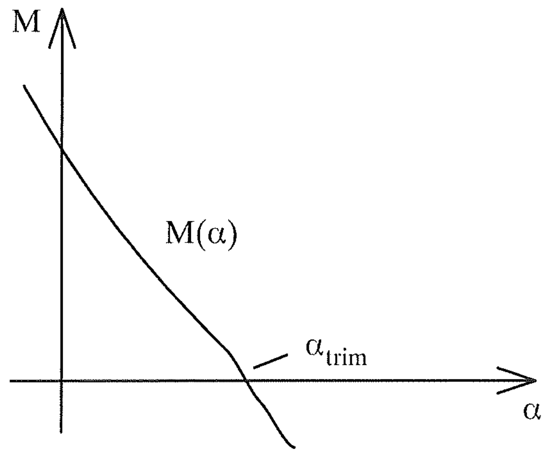
$$\tau_{phugoid} = \sqrt{2}\pi u_0/g$$

I phugoidrörelsen gäller vanligtvis att u når sitt maximum ca 90 grader före θ. Mät ut i plottarna och ange i rapporten vad vinkeln blir för aktuell simulering. Svara inte 90 grader. Förklara hur du tagit fram vinkeln.

Försök slutligen lista ut hur flygplanets rörelse genom luften ser ut, och beskriv denna med ord. Rita in hur flygplanets nos pekar för några lägen i kurvan $z^f(x^f)$. Ledning: jämför anfallsvinkelns storlek med tippvinkelns.

Statisk stabilitet

Begreppet "statisk stabilitet" innebär att luftkrafterna skall ge ett återförande moment vid en störning i anfallsvinkeln. Detta ger en grov uppfattning om flygplanets stabilitet. Tippmomentet som funktion av anfallsvinkeln skall alltså ha ett principiellt utseende som i figuren:



Momentkurva för statiskt stabilt flygplan.

Villkoret för statisk stabilitet är:

$$\frac{dM}{d\alpha} < 0$$

Uppgift 4

Ändra M_w så att flygplanet blir statiskt instabilt genom att sätta $C_{m_\alpha} = 0.1$ i uttrycket i Appendix A. Genomför en beräkning med initialvillkoren (6) under 100 s, och plotta de sex fasvariablernas variation med tiden samt kurvor över $z^f(x^f)$ och anfallsvinkeln som funktion av tiden. Kommentera resultatet. Eventuellt måste du skruva upp värdet ytterligare, t.ex till $C_{m_\alpha} = 0.5$ för att få den önskade effekten om du räknar på ett stort och tungt transportflygplan.

Short–period moden

Den longitudinella rörelsen hos ett flygplan har två typiska rörelsemönster, phugoid–moden och short–period moden, där phugoid–moden studerats i uppgift 3 ovan. Short–period moden, som brukar kallas "tippsvängning" på svenska, har betydligt kortare periodtid än phugoid–moden. Den är även kraftigt dämpad, vilket är något som eftersträvas vid flygplanskonstruktionen, eftersom ett flygplan med en tillväxande tippsvängning blir helt okontrollerbart. Den kraftiga dämpningen gör det dock svårt att se denna rörelse i plottarna i uppgift 1.

Uppgift 5

Återställ den statiska stabiliteten som saboterades i uppgift 4. Sabotera i stället dämpningen av short–period moden genom att sätta $M_q = Z_w = 0$ i kraftmodellen.

Ändra sedan initialvillkoren (6) så att $\theta_i = 0$ och sätt i stället $q_i = 0.1$ rad/s . Genomför en beräkning med dessa initialvillkor under en tidsperiod motsvarande en femtedel av phugoidsvängningens period, och plotta de sex fasvariablernas variation med tiden samt kurvor över $z^f(x^f)$ och anfallsvinkeln som funktion av tiden. Jämför anfallsvinkeln med tippvinkeln dels för denna beräkning och dels för phugoidsvängningen. Beskriv short–period–modens utseende.